3
Geometria de Contato

3.1
Formas Diferenciais

Para facilitar o entendimento das formas diferenciais iremos começar com o caso $\mathbb{R}^3$, depois faremos uma primeira generalização para o caso $\mathbb{R}^n$ e finalmente passaremos a tratar das formas diferenciais em uma varidade M de dimensão n.

Seja $p \in \mathbb{R}^3$. O conjunto de vetores aplicados em p, chamado de espaço tangente de $\mathbb{R}^3$ em p, será denotado por $T_p\mathbb{R}^3$. Identificaremos os vetores $e_1 = (1,0,0),\ e_2 = (0,1,0),\ e_3 = (0,0,1)$ da base canônica de $\mathbb{R}^3$ com os seus transladados $(e_1)_p,\ (e_2)_p,\ (e_3)_p$ ao ponto p.

Consideremos para cada espaço tangente $T_p\mathbb{R}^3$ o espaço dual $(T_p\mathbb{R}^3)^* = \{f : T_p\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}; f \text{ é um funcional linear}\}$.

Os funcionais lineares $(dx_i)_p : T_p\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ i = 1,2,3$ definidos por $(dx_i)_p \cdot v = v_i$, onde $v = v_1(e_1)_p + v_2(e_2)_p + v_3(e_3)_p$, formam a base dual do espaço $(T_p\mathbb{R}^3)^*$. De fato, $(dx_i)_p \in (T_p\mathbb{R}^3)^*$, $i = 1,2,3$ e

$$(dx_i)_p(e_j) = \frac{\partial x_i}{\partial x_j} = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ 1 & \text{se } i = j. \end{cases}$$

Definição 3.1.1 *Uma* **1-forma diferencial** *(ou simplesmente 1-forma) em* $\mathbb{R}^3$ *é uma aplicação* $\lambda : \mathbb{R}^3 \to (T\mathbb{R}^3)^*$ *que pode ser escrita na forma*

$$\lambda(p) = a_1(p)(dx_1)_p + a_2(p)(dx_2)_p + a_3(p)(dx_3)_p$$

ou

$$\lambda = \sum_{i=1}^{3} a_i\ dx_i,$$

onde $a_i : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *são funções diferenciáveis.*

Seja $\Lambda^2(T_p\mathbb{R}^3)^*$ o conjunto das aplicações $\varphi : T_p\mathbb{R}^3 \times T_p\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ bilineares e alternadas, isto é, $\varphi(v_1, v_2) = -\varphi(v_2, v_1),\ \forall v_1, v_2 \in T_p\mathbb{R}^3$. Sabemos que

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0510529/CB

$(\Lambda^2(T_p\mathbb{R}^3)^*,\ +,\ \cdot)$ é um espaço vetorial real.

Sejam φ_1 e φ_2 1-formas diferenciais. Definimos

$$\varphi_1 \wedge \varphi_2(v_1, v_2) = \det(\varphi_i(v_j)) = \begin{vmatrix} \varphi_1(v_1) & \varphi_1(v_2) \\ \varphi_2(v_1) & \varphi_2(v_2) \end{vmatrix}.$$

Note que $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \in \Lambda^2(T_p\mathbb{R}^3)^*$.

Observação 3.1.2 *Com o visto acima damos um significado para $(dx_i)_p \wedge (dx_j)_p$ onde $i, j = 1, 2, 3$. Fazendo $(dx_i)_p \wedge (dx_j)_p = (dx_i \wedge dx_j)_p$ temos que o conjunto $\{(dx_i \wedge dx_j)_p,\ i < j\ \}$ é uma base para o espaço $\Lambda^2(T_p\mathbb{R}^3)^*$ (essa afirmação será apresentada futuramente como uma proposição mais geral, proposição 3.1.4). Além disso,*

$$(dx_i \wedge dx_j)_p = -(dx_j \wedge dx_i)_p$$

e

$$(dx_i \wedge dx_i)_p = 0,\ \forall i = 1, 2, 3.$$

Definição 3.1.3 *Uma* **2-forma diferencial** *(ou simplesmente 2-forma) em $\mathbb{R}^3$ é uma aplicação $\lambda : \mathbb{R}^3 \to \Lambda^2(T\mathbb{R}^3)^*$ que pode ser escrita na forma*

$$\lambda(p) = a_{12}(p)(dx_1 \wedge dx_2)_p + a_{13}(p)(dx_1 \wedge dx_3)_p + a_{23}(p)(dx_2 \wedge dx_3)_p$$

ou

$$\lambda = \sum_{i<j} a_{ij} dx_i \wedge dx_j, \qquad i, j = 1, 2, 3,$$

onde $a_{ij} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ são funções diferenciáveis.

Sejam $p \in \mathbb{R}^n$, $T_p\mathbb{R}^n$ o espaço tangente de $\mathbb{R}^n$ em p e $(T_p\mathbb{R}^n)^*$ o seu espaço dual. Denotaremos por $\Lambda^k(T_p\mathbb{R}^n)^*$ o **conjunto das aplicações k-lineares alternadas**,

$$\varphi : \underbrace{T_p\mathbb{R}^n \times T_p\mathbb{R}^n \times \ldots \times T_p\mathbb{R}^n}_{k \quad \text{vezes}} \to \mathbb{R}.$$

Temos que $(\Lambda^k(T_p\mathbb{R}^n)^*,\ +,\ \cdot)$ é um espaço vetorial real.

Sejam $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k$ 1-formas. Definimos

$$(\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \ldots \wedge \varphi_k)(v_1, v_2, \ldots, v_k) = \det(\varphi_i(v_j)) = \begin{vmatrix} \varphi_1(v_1) & \varphi_1(v_2) & \ldots & \varphi_1(v_k) \\ \varphi_2(v_1) & \varphi_2(v_2) & \ldots & \varphi_2(v_k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_k(v_1) & \varphi_k(v_2) & \ldots & \varphi_k(v_k) \end{vmatrix}.$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0510529/CB

Das propriedades de determinante concluímos que

$$(\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \ldots \wedge \varphi_k) \in \Lambda^k(T_p\mathbb{R}^n)^*.$$

Assim $(dx_{i_1})_p \wedge (dx_{i_2})_p \wedge \ldots \wedge (dx_{i_k})_p \in \Lambda^k(T_p\mathbb{R}^n)^*$. Denotaremos este elemento por $(dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k})_p$.

Proposição 3.1.4 (Ver (Ca)) *O conjunto*

$$A = \{(dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k})_p,\ i_1 < i_2 < \ldots < i_k,\ \textit{onde } i_j \in \{1, 2, \ldots, n\}\}$$

é uma base para $\Lambda^k(T_p\mathbb{R}^n)^*$.

Definição 3.1.5 *Uma* **k-forma diferenciável** *(ou simplesmente k-forma) em $\mathbb{R}^n$ é uma aplicação $\lambda : \mathbb{R}^n \to \Lambda^k(T\mathbb{R}^n)^*$ que pode ser escrita na forma*

$$\lambda(p) = \sum_{i_1 < \ldots < i_k} a_{i_1 \ldots i_k}(p)(dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k})_p, \quad i_j \in \{1, 2, \ldots, n\},$$

onde $a_{i_1 \ldots i_k} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ são aplicações diferenciáveis.

Para a notação ficar menos pedante vamos indicar por I a k-upla $(i_1, \ldots, i_k)$, $i_1 < \ldots < i_k$, com $i_j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ e passaremos denotar λ por:

$$\lambda = \sum_I a_I dx_I.$$

Às vezes, ao invés de escrevermos $\lambda(p)$ escreveremos λ_p. Em alguns contextos (desde que não gere confusão) omitiremos o ponto e λ passará denotar um funcional linear, caso λ seja uma 1-forma.

Observação 3.1.6 *Por convenção, diremos que uma função diferenciável de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}$ é uma* **0-forma** *em $\mathbb{R}^n$.*

Sejam α e β k-formas. Consideremos

$$\alpha = \sum_I a_I dx_I,$$

$$\beta = \sum_I b_I dx_I,$$

onde $I = (i_1, \ldots, i_k)$, $i_1 < \ldots < i_k$.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0510529/CB

Definimos a soma por:

$$\alpha + \beta = \sum_I (a_I + b_I) dx_I.$$

Definição 3.1.7 *Sejam* $\alpha = \sum_I a_I dx_I$, $I = (i_1, \ldots, i_k)$, $i_1 < \ldots < i_k$, $\beta = \sum_J b_J dx_J$, $J = (j_1, \ldots, j_s)$, $j_1 < \ldots < j_s$. *Definimos o* **produto exterior** *por:*

$$\alpha \wedge \beta = \sum_{I,J} a_I b_J dx_I \wedge dx_J.$$

Exemplo 3.1.8 *Sejam* $\alpha = dx - 5ydy + xydz$ *e* $\beta = zdx \wedge dy + 2ydx \wedge dz$ *formas diferenciáveis em* $\mathbb{R}^3$. *Calculemos o produto exterior de* α *com* β.

$$\begin{aligned}
\alpha \wedge \beta &= zdx \wedge dx \wedge dy + 2ydx \wedge dx \wedge dz - 5yzdy \wedge dx \wedge dy \\
&\quad -10y^2 dy \wedge dx \wedge dz + xyzdz \wedge dx \wedge dy + 2xy^2 dz \wedge dx \wedge dz \\
&= -10y^2 dy \wedge dx \wedge dz + xyzdz \wedge dx \wedge dy \\
&= (10y^2 + xyz) dx \wedge dy \wedge dz.
\end{aligned}$$

Proposição 3.1.9 (Ver (Ca)) *Sejam* α *uma* k*-forma,* β *uma* r*-forma e* γ *uma* s*-forma. Então:*

1. $(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$;
2. $\alpha \wedge \beta = (-1)^{kr} \beta \wedge \alpha$;
3. $\alpha \wedge (\beta + \gamma) = \alpha \wedge \beta + \alpha \wedge \gamma$, *caso* $r = s$.

Não precisamos sempre considerar formas diferenciais definidas em todo espaço $\mathbb{R}^3$, podemos considerar formas diferenciais definidas apenas em um conjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^3$. Obviamente as definições e propriedades apresentadas se estendem naturalmente a esta situação.

A próxima definição nos dá uma operação sobre k-formas, que generaliza a operação de diferenciação para funções. Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável, em particular f é uma 0-forma, então sua diferencial

$$df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$$

é uma 1-forma. Assim por analogia tal operação sobre uma k-forma deve nos dar uma $(k+1)$-forma.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0510529/CB

Definição 3.1.10 *Seja $\lambda = \sum_I a_I dx_I$ uma k-forma diferenciável. Definimos a* **diferencial exterior** *de λ por:*

$$d\lambda = \sum_I da_I \wedge dx_I = \sum_{j,I} \frac{\partial a_I}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_I.$$

Exemplo 3.1.11 *Seja $\lambda = 3xydx - xzdy$ uma 1-forma em $\mathbb{R}^3$. Calculemos diferencial de λ:*

$$\begin{aligned} d\lambda &= d(3xy) \wedge dx - d(xz) \wedge dy \\ &= 3(ydx + xdy) \wedge dx - (zdx + xdz) \wedge dy \\ &= -3xdx \wedge dy - zdx \wedge dy + xdy \wedge dz \\ &= -(3x + z)dx \wedge dy + xdy \wedge dz. \end{aligned}$$

Algumas propriedades da diferenciação de k-formas são dadas pela proposição:

Proposição 3.1.12 (Ver (Ca)) *Sejam α uma r-forma e β uma s-forma. Então:*

1. $d(\alpha + \beta) = d\alpha + d\beta$, *caso* $r = s$;
2. $d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^r \alpha \wedge d\beta$;
3. $d(d\alpha) = d^2\alpha = 0$.

Em nosso estudo será conveniente que considerarmos formas diferenciais definidas em uma variedade diferenciável. O que vamos fazer agora é definir as formas diferenciais numa variedade diferenciável $M \subset \mathbb{R}^n$ de dimensão m e observar que para esta situação existem propriedades análogas às de formas diferenciais definidas em $\mathbb{R}^n$. De agora em diante $\Lambda^k(T_pM)^*$ denota o conjunto de todas as aplicações k-lineares alternadas

$$\varphi : \underbrace{T_pM \times T_pM \times \ldots \times T_pM}_{k \quad \text{vezes}} \to \mathbb{R}.$$

Definição 3.1.13 *Uma k-forma diferencial (ou k-forma) em M é uma aplicação suave $\lambda : M \to \Lambda^k(TM)^*$ que associa a cada ponto $p \in M$ uma aplicação k-linear alternada λ_p no espaço tangente T_pM.*

Observação 3.1.14 *Seja $\phi : U_0 \to U$ uma parametrização de um aberto $U \subset M$, onde U_0 é um aberto em $\mathbb{R}^m$ com coordenadas $u_1, u_2, \ldots, u_m$. Dado*

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0510529/CB

um ponto $p \in U$ temos $p = \phi(u)$ e a base

$$\left\{ \frac{\partial \phi}{\partial u_1}(u), \ldots, \frac{\partial \phi}{u_m}(u) \right\} \subset T_pM.$$

Consideremos $\{du_1, \ldots, du_m\}$ como a base dual de $(T_pM)^*$. Na verdade, $du_1, du_2, \ldots, du_m$ são 1-formas diferenciais em U. Para cada $p \in U$ temos funcionais lineares $du_i(p) \in (T_pM)^*$, $\forall i = 1, 2, \ldots, m$. De modo que a notação fique mais simples, vamos usar a notação (du_i) ao invés de $du_i(p)$, pois não há risco de confusão.

Em cada ponto $p = \phi(u) \in U$ temos que as k-formas $du_I = du_1 \wedge \ldots \wedge du_m$, com $I = (i_1, \ldots, i_k)$, $i_1 < \ldots < i_k$, constituem uma base de $\Lambda^k(T_pM)^*$. Daí se λ é uma k-forma diferencial em M, então podemos escrever para cada ponto $p = \phi(u) \in U$:

$$\lambda_p = \lambda(\phi(u)) = \sum_I a_I(u) du_I,$$

onde $a_I : U_0 :\to \mathbb{R}$ são funções suaves.

Sejam M e N duas variedades e consideremos uma aplicação diferenciável $f : M \to N$. Dado um ponto $p \in M$ a aplicação f induz uma transformação linear

$$f_p^* : \Lambda^k(T_{f(p)}N) \to \Lambda^k T_pM$$

que associa k-formas em N à k-formas em M.

Seja λ uma k-forma em N. Definimos a k-forma diferencial $f^*\lambda$ em M como:

$$(f^*\lambda)_p(v_1, v_2, \ldots, v_k) = \lambda_{f(p)} \cdot (Df(p) \cdot v_1, \ldots, Df(p) \cdot v_k), \qquad (3\text{-}1)$$

onde $v_1, \ldots, v_k \in T_pM$ e $Df(p)$ denota a derivada de f no ponto $p \in M$. Escrevmos $f_p^*\lambda_{f(p)} = (f^*\lambda)_p$, e fazendo o ponto p variar em M obtemos uma aplicação f^* que leva k-formas de N em k-formas de M.

Como sabemos $Df(p) : T_pM \to T_{f(p)}N$ é uma transformação linear. Deste modo podemos considerar sua transposta $[Df(p)]^t : \Lambda^k(T_{f(p)}N)^* \to \Lambda^k(T_pM)^*$. Por definição temos que

$$[Df(p)]^t \cdot \lambda_{f(p)} = \lambda_{f(p)} Df(p).$$

Pela eq. (3-1) segue que

$$(f^*\lambda)_p = [Df(p)]^t \cdot \lambda_{f(p)}.$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0510529/CB

Caso $g : N \to \mathbb{R}$ seja uma 0-forma convencionamos que $f^*g = g \circ f$.

Definição 3.1.15 *A forma diferencial $f^*\lambda$ chama-se "***pull-back***" da forma diferencial λ por meio de f.*

Proposição 3.1.16 (Ver (Ca)) *Sejam $f : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação diferenciável e λ uma forma diferencial em $\mathbb{R}^n$. Então*

$$d(f^*\lambda) = f^*(d\lambda).$$

Observação 3.1.17 *Sejam $\phi : U_0 \to U \subset M$ e $\psi : V_0 \to V \subset N$ parametrizações suaves, com $f(U) \subset V$ e $\lambda_q = \sum_I b_I dv_I$ para todo $q = \psi(v) \in V$. Um resultado conhecido (ver (Li2) pag. 418) é que para cada I, tem-se*

$$f^*(dv_I) = \sum_J \det\left(\frac{\partial v_I}{\partial u_J}\right) du_J,$$

onde $\left(\frac{\partial v_I}{\partial u_J}\right)$ é a matriz jacobiana de $D_u(\psi^{-1} \circ f \circ \phi)$ e $\det\left(\frac{\partial v_I}{\partial u_J}\right)$ denota o determinante da matriz $k \times k$ obtida de $\left(\frac{\partial v_I}{\partial u_J}\right)$ tomando-se os $\frac{\partial v_i}{\partial u_j}$ com $i \in I$ e $j \in J$. Desta maneira para obtermos $f^*\lambda$ basta substituirmos em λ cada dv_I por

$$\sum_J \det\left(\frac{\partial v_I}{\partial u_J}\right) du_J.$$

Proposição 3.1.18 (Ver (Li2)) *Sejam $f : M \to N$ uma aplicação diferenciável, α uma r-forma e β uma s-forma. Então:*

1. *$f^*(\alpha + \beta) = f^*\alpha + f^*\beta$, caso $r = s$;*
2. *$f^*(c\alpha) = cf^*\alpha$, onde $c \in \mathbb{R}$;*
3. *$f^*(\alpha \wedge \beta) = f^*\alpha \wedge f^*\beta$;*
4. *$(g \circ f)^*\alpha = f^*(g^*\alpha)$, onde $g : N \to P$ é outra aplicação diferenciável.*

Seja λ uma k-forma diferencial em uma variedade M. Se consideramos uma parametrização $\phi : U_0 \to U$ em M, existe uma única $(k+1)$-forma diferencial $d_\phi\lambda$ em U tal que $\phi^*(d_\phi\lambda) = d\phi^*\lambda$, pois o "pull-back" $\lambda \mapsto \phi^*\lambda$ é uma bijeção das formas em U sobre as formas em U_0. Se $\lambda|_U = \sum_I a_I(u)du_I$, então pela observação anterior temos que $\phi^*\lambda = \sum_I a_I dx_I$, daí $d(\phi^*\lambda) = \sum_I da_I \wedge dx_I$. Logo a identidade $\phi^*(d_\phi\lambda) = d(\phi^*\lambda)$ significa que

$$d_\phi\lambda = \sum_I da_I \wedge du_I.$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0510529/CB

Definição 3.1.19 *A diferencial exterior $d\lambda$ de uma k-forma diferencial em M é a $(k+1)$-forma em M cujo valor em cada ponto $p \in M$ é dado por $d\lambda_p = d_\phi \lambda_p$, onde $\phi : U_0 \to U$ é uma parametrização em U tal que $p \in U$.*

Lema 3.1.20 *A diferencial exterior de uma forma diferencial não depende da parametrização escolhida.*

Prova. Sejam $\phi : U_0 \to U$ e $\psi : V_0 \to V$ duas parametrizações diferenciáveis de M. Basta provarmos que se λ é uma forma diferencial em M, então $d_\phi \lambda = d_\psi \lambda$ em $U \cap V$. Temos que

$$\phi = \psi \circ \xi : \phi^{-1}(U \cap V) \to U \cap V.$$

Logo pela proposição 3.1.18 item 4 segue que $\phi^* = \xi^* \circ \psi^*$. Assim,

$$\phi^*(d_\psi \lambda) = (\xi^* \psi^*)(d_\psi \lambda) = d(\xi^* \psi^* \lambda) = d(\phi^* \lambda) = \phi^*(d_\phi \lambda).$$

Portanto $d_\psi \lambda = d_\phi \lambda$ em $U \cap V$. □

As propriedades apresentadas anteriormente para a diferencial exterior de formas diferenciais definidas em $\mathbb{R}^n$ são validas também para as definidas em uma variedade.

Agora vamos apresentar outras construções básicas envolvendo formas diferenciais e suas propriedades sem fazer suas respectivas demonstrações. Para o leitor interessado nas demonstrações aqui omitidas sugerimos ver (AM).

Um campo de vetores de uma variedade M é uma aplicação suave X que leva um ponto $p \in M$ num vetor tangente à M em p:

$$\begin{aligned} X : M &\to TM \\ p &\mapsto X(p) \in T_pM. \end{aligned}$$

Um campo de vetores tempo-dependente, X_t, é uma família suave a um parâmentro de campos de vetores. Denotaremos por $\mathfrak{X}(M)$ o conjunto dos campos de vetores da variedade M.

Definição 3.1.21 *Sejam $X \in \mathfrak{X}(M)$ e λ uma $(k+1)$-forma. O* **produto interior** *de λ por X é a k-forma $i_X(\lambda)$ definida por*

$$i_X \lambda(X_1, \ldots, X_k) = \lambda(X, X_1, \ldots, X_k),$$

onde $X_i \in \mathfrak{X}(M)$, $i = 1, \ldots, k$.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0510529/CB

Proposição 3.1.22 *Sejam α uma r-forma e β uma s-forma em M, $f, g : M \to \mathbb{R}$ e $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Então:*

1. $i_X(f\alpha + g\beta) = f i_X\alpha + g i_X\beta$, *caso* $r = s$;
2. $i_X(\alpha \wedge \beta) = i_X\alpha \wedge \beta + (-1)^r \alpha \wedge i_X\beta$;
3. $i_{(fX+gY)}\alpha = f i_X\alpha + g i_Y\alpha$;
4. $i_X dh = X(h)$, *onde* $h : M \to \mathbb{R}$ *é uma aplicação diferenciável.*

Definição 3.1.23 *A derivada de Lie de uma k-forma ω ao longo de um campo de vetores $X \in \mathfrak{X}(M)$ é uma k-forma $\mathcal{L}_X\omega$ definida por:*

$$\mathcal{L}_X\omega = \frac{d}{dt}(\phi_t^*\omega)\Big|_{t=0} = \lim_{t\to 0}\frac{\phi_t^*\omega - \omega}{t},$$

onde $\phi_t : M \to M$ é o fluxo associado a X.

Proposição 3.1.24 *Sejam α r-forma e β s-forma ambas em M e $X \in \mathfrak{X}(M)$. Então:*

1. $\mathcal{L}_X(a\alpha + b\beta) = a\mathcal{L}_X\alpha + b\mathcal{L}_X\beta$, *caso* $r = s$;
2. $\mathcal{L}_X(\alpha \wedge \beta) = \mathcal{L}_X\alpha \wedge \beta + \alpha \wedge \mathcal{L}_X\beta$;
3. $\mathcal{L}_X f = X(f)$, *onde* $f : M \to \mathbb{R}$ *é uma aplicação diferenciável;*
4. $\mathcal{L}_X d\alpha = d\mathcal{L}_X\alpha$.

Teorema 3.1.25 (Fórmula de Cartan) *Sejam ω uma k-forma diferencial em M e $X \in \mathfrak{X}(M)$. Então*

$$\mathcal{L}_X\omega = i_X d\omega + d i_X\omega.$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0510529/CB

3.2
Estruturas de Contato

Definição 3.2.1 *Seja M uma variedade de dimensão $2n+1$. Uma 1-forma α em M é dita* **forma de contato** *se*

$$\alpha_p \wedge (d\alpha_p)^n \neq 0, \ \forall p \in M.$$

Definição 3.2.2 *Seja M uma variedade de dimensão $2n+1$. Um campo de hiperplanos ξ em M chama-se* **estrutura de contato** *se para cada ponto p existem uma vizinhança V de p e uma forma de contato α tal que $\xi|_V = \ker(\alpha)$. O par (M, ξ) é chamado variedade de contato.*

O teorema de Frobenius (ver pag. 215 de (CN)) afirma que um campo de planos definido localmente por uma 1-forma α é completamente integrável se e somente se $\alpha \wedge d\alpha \equiv 0$. Assim uma estrutura de contato é um campo de planos completamente não integrável.

Exemplo 3.2.3 *Seja $M = \mathbb{R}^3 = \{(x, y, z); \ x, y, z \in \mathbb{R}\}$. A 1-forma $\lambda = dz - ydx$ é uma forma de contato.*

De fato,

$$\lambda \wedge d\lambda = (dz - ydx) \wedge (dx \wedge dy) = dz \wedge dx \wedge dy \neq 0.$$

A estrutura de contato dada pela forma de contato $\lambda = dz - ydx$ é chamada **estrutura de contato canônica** de $\mathbb{R}^3$, denotada por ξ_{can}. Note que em um ponto (x, y, z) a estrutura de contato ξ é gerada por $\{\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial z}\}$. Assim em qualquer ponto no plano xz o campo de planos ξ é horizontal. Se movimentamos até o ponto $(0, 1, 0)$ temos que o plano de contato nesse ponto tem uma inclinação de $45°$ em relação ao eixo y. Em geral se iniciamos da origem de um ponto no plano xy temos o plano horizontal e à medida que vamos nos afastando do plano xz por uma reta que contenha a direção $\frac{\partial}{\partial y}$ no sentido positivo o plano gira em sentido anti-horário e quando a coordenada y de tal ponto tende para ∞ o plano tende a ficar vertical, veja figura 3.1.

Exemplo 3.2.4 *Consideremos o 3-toro $T^3 = \mathbb{R}^3/\mathbb{Z}^3$. A 1-forma $\alpha_n = \cos(2\pi nz)dx + \operatorname{sen}(2\pi nz)dy$ é uma forma de contato, onde $n \in \mathbb{N}$.*

De fato,

$$\begin{aligned} \alpha_n \wedge d\alpha_n &= 2n\pi(\cos^2(2n\pi z) + \operatorname{sen}^2(2n\pi z))dx \wedge dz \wedge dy \\ &= 2n\pi \, dx \wedge dz \wedge dy \neq 0. \end{aligned}$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0510529/CB

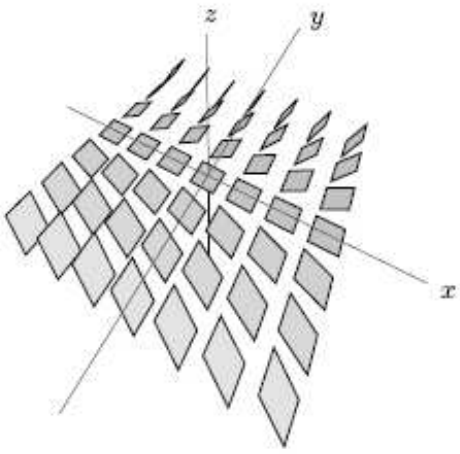

Figura 3.1: Estrutura de Contato Canônica de $\mathbb{R}^3$

Observe que essa estrutura de contato é gerada por $\{\frac{\partial}{\partial z}, sen\,(2n\pi z)\frac{\partial}{\partial x} - cos\,(2n\pi z)\frac{\partial}{\partial y}\}$, logo tem comportamento similar (ao longo de retas que contém a direção $\frac{\partial}{\partial z}$) ao visto na estrutura de contato canônica de $\mathbb{R}^3$. Mas neste caso para todo $n \in \mathbb{N}$ a variação total do ângulo num intervalo fechado de comprimento 1 do plano de contato com a reta x é igual $2\pi n$ e os planos giram em torno do eixo z.

Exemplo 3.2.5 *Sejam agora $\mathbb{R}^3$ com coordenadas cilíndricas (r, θ, z) e $\alpha = dz + r^2\,d\theta$. Note que*

$$\alpha \wedge d\alpha = 2r dz \wedge dr \wedge d\theta \neq 0, \quad r \neq 0,$$

logo $\xi_{sim} = \ker \alpha$ é uma estrutura de contato. O conjunto $\{\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \theta} - r^2\frac{\partial}{\partial z}\}$ gera o campo de planos ξ_{sim}, daí o campo de planos se comporta como ilustrado na figura 3.2.

Exemplo 3.2.6 *Consideremos $\mathbb{R}^3$ com coordenadas cilíndricas e $\alpha = cos\,r\,dz + r\,sen\,r\,d\theta$. A estrutura de contato ξ_{ot} dada por α tem comportamento semelhante (ao longo de retas perpendiculares ao eixo z) a do exemplo anterior. Mas quando move-se na direção perpendicular ao eixo z os planos giram muitas vezes (ver figura 3.3), já na estrutura de contato do exemplo anterior os planos giram no máximo $90°$ (o ângulo de $90°$ é atingido no ∞).*

Exemplo 3.2.7 *Consideremos S^3 em $\mathbb{R}^4$ e a 1-forma*

$$\alpha_0 = (x_1dy_1 - y_1dx_1 + x_2dy_2 - y_2dx_2)|_{S^3},$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0510529/CB

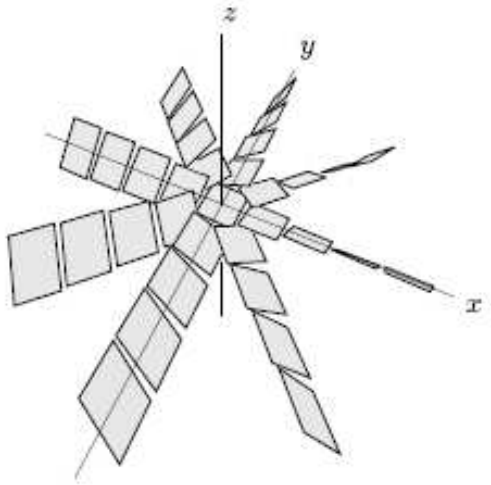

Figura 3.2: Estrutura de Contato ξ_{sim} em $\mathbb{R}^3$

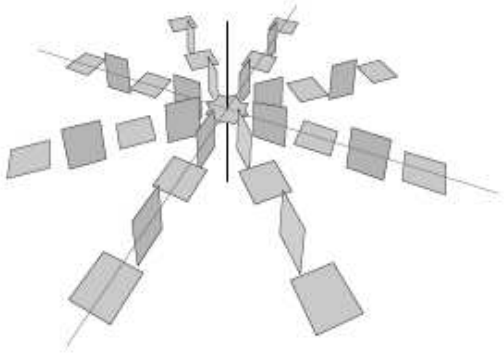

Figura 3.3: Estrutura de Contato ξ_{ot} em $\mathbb{R}^3$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0510529/CB

onde (x_1, y_1, x_2, y_2) são coordenadas cartesianas em $\mathbb{R}^4$. Se r denota a coordenada radial de $\mathbb{R}^4$, isto é, $r^2 = x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2$, então $\alpha_0 \wedge d\alpha_0 \wedge rdr \neq 0$ em $\mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$. Assim o núcleo de α_0 é uma estrutura de contato, dizemos que $\ker(\alpha_0)$ *é a estrutura de contato canônica de S^3 e o par (S^3, ξ_{can}) denota a esfera S^3 com estrutura de contato dada por* $\ker(\alpha_0)$.

Definição 3.2.8 *Uma estrutura de contato ξ é dita* **transversalmente orientável** *se é dada globalmente por alguma forma de contato α, isto é, $\xi =$* $\ker \alpha$.

Dada uma forma de contato α temos que $f\alpha$ também é uma forma de contato, para toda função diferenciável $f : M \to \mathbb{R}$ que não se anule. De fato,

$$f\alpha \wedge (df\alpha)^n = f\alpha \wedge (fd\alpha + df \wedge \alpha)^n = f^{n+1}\alpha \wedge (d\alpha)^n \neq 0.$$

Além disso, $f\alpha$ determina a mesma estrutura de contato dada por α. Como dois funcionais lineares que possuem o mesmo núcleo são múltiplos um do

outro temos que se as formas de contato α e β determinam a mesma estrutura de contato, então existe uma função diferenciável f que não se anula tal que $\beta = f\alpha$.

Definição 3.2.9 *Seja M uma variedade de dimensão 3. Uma estrutura de contato ξ em M é dita* **paralelizável** *se o seu campo de hiperplanos subjacente é trivial, isto é, se existem dois campos de vetores X e Y tais que em todo ponto $p \in M$, $X(p)$ e $Y(p)$ formam uma base de ξ_p.*

Note que se temos a orientação de M mais a orientação transversa, então temos uma orientação do plano. Dado um campo de vetores X com $0 \neq X(p) \in \xi_p$, podemos obter $Y(p)$ girando $X(p)$ pelo ângulo $\frac{\pi}{2}$ na direção positiva dada pela orientação de ξ_p, relativo a uma métrica riemanniana qualquer em M. Deste modo se existe uma forma de contato α tal que $\xi = \ker \alpha$ (ξ é transversalmente orientável), então ela é paralelizável se, e somente se, existe um campo de vetores X em M tal que $0 \neq X(p) \in \ker \alpha_p$, para todo $p \in M$.

Proposição 3.2.10 *Seja M uma variedade de dimensão 3 fechada. Se $H_1(M, \mathbb{Z}) = 0$, então a estrutura de contato $\ker(\alpha)$ em M é paralelizável.*

Uma demonstração deste último fato pode ser encontrada em (Lin).

Definição 3.2.11 *Duas variedades de contato (M_1, ξ_1) e (M_2, ξ_2) são ditas* **contatomorfas** *se existe um difeomorfismo $f : M_1 \to M_2$ tal que*

$$Df(\xi_1) = \xi_2,$$

onde $Df : TM_1 \to TM_2$ denota a derivada de f. Se as estruturas de contato ξ_i são dadas por $\xi_i = \ker(\lambda_i)$, $i = 1, 2$, então equivalentemente as variedades de contato (M_1, ξ_1) e (M_2, ξ_2) são contatomorfas se existem um difeomorfismo f e uma aplicação $g : M_1 \to \mathbb{R}$, $g(p) \neq 0$ $\forall p \in M_1$, tais que $f^*\lambda_2 = g\lambda_1$. Neste caso f é chamado de **contatomorfismo**.

Proposição 3.2.12 *Seja $\mathbb{R}^3$ com coordenadas cilíndricas (r, θ, z). Então ξ_{sim} é contatomorfa a ξ_{can}.*

Prova. Temos que

$$d(z + xy) - 2ydx = dz + xdy - ydx = dz + r^2 d\theta.$$

Logo $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $\phi(x, y, z) = (x, 2y, z+xy)$ é um contatomorfismo entre ξ_{can} e ξ_{sim}. □

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0510529/CB

Proposição 3.2.13 (Ver (Ge)) *Se $p \in S^3$, então a variedade de contato $(S^3 \setminus \{p\}, \xi_0)$ é contatomorfa a $(\mathbb{R}^3, \xi_{can})$.*

Seja D um disco numa variedade M de dimensão 3. O disco D é chamado de **disco super torcido** se D é tangente à alguma estrutura de contato ξ em M ao longo do seu bordo e transverso ao interior de D exceto em um ponto.

Definição 3.2.14 *Uma estrutura de contato ξ em M é dita* **super torcida** *se existe um mergulho de algum disco super torcido D. Caso contrário a estrutura de contato é dita* **tensa**.

Exemplo 3.2.15 *A estrutura de contato ξ_{ot} é super torcida. De fato, basta observar que o disco $D = \{(r, \theta, z);\ z = 0 \ e\ r \leq \pi\}$ é um disco super torcido para ξ_{ot}.*

Observação 3.2.16 *Para uma estrutura de contato ser super torcida é necessário que o campo de planos de tal estrutura de contato gire pelo menos 2π.*

A proposição 3.2.13 junto com o teorema de Bennequin o qual afirma que a estrutura de contato canônica em S^3 é tensa (ver (Ben)) mostra que a estrutura de contato canônica de $\mathbb{R}^3$ é tensa.

Proposição 3.2.17 (Ver (El)) *Toda estrutura de contato tensa em S^3 é contatomorfa à ξ_0.*

Além desses resultados já mencionados sabe-se que a estrutura de contato canônica ξ_{can} é a única estrutura de contato tensa em $\mathbb{R}^3$ a menos de contatomorfismo. Uma justificativa deste fato pode ser encontrada em (Ge).

Sabe-se também que as estruturas de contato ξ_n, $n \in \mathbb{N}$, em $T^3 = \mathbb{R}^3/\mathbb{Z}^3$ definidas por

$$\alpha_n = cos(2\pi nz)\, dx + sen(2\pi nz)\, dy = 0$$

são tensas. Uma justificativa para tal fato pode ser encontrada em (Ge). Além disso, Kanda provou em (Kan) que qualquer estrutura de contato tensa em T^3 é contatomorfa à uma delas e também que, se $m \neq n$, então ξ_m e ξ_n não são contatomorfas.

Definição 3.2.18 *Seja λ uma forma de contato. O* **campo de vetores de Reeb** *de λ é o campo de vetores R_λ definido pelas seguintes condições:*

1. $\lambda(R_\lambda) \equiv 1$;

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0510529/CB

2. $i_{R_\lambda}(d\lambda) \equiv 0$.

Como $d\lambda$ é uma forma bilinear alternada numa variedade M de dimensão ímpar seu determinante sobre uma base é zero. Daí, podemos encontrar um vetor não nulo R_λ de modo que $i_{R_\lambda}(d\lambda) \equiv 0$. Este vetor pode não estar numa reta em $\ker(\lambda)$, pois $d\lambda$ é não degenerada neste hiperplano tangente. Logo $\lambda(R_\lambda) \neq 0$, e neste caso podemos normalizar R_λ de modo que $\lambda(R_\lambda) \equiv 1$.

Além disso, pelo teorema 3.1.25, a derivada de Lie $\mathcal{L}_X$ ao longo de um campo de vetores X satisfaz a seguinte fórmula:

$$\mathcal{L}_X = d \circ i_X + i_X \circ d.$$

Assim as condições que caracterizam o campo de vetores de Reeb podem ser escritas como:

$$\lambda(R_\lambda) \equiv 1 \text{ e } \mathcal{L}_{R_\lambda}(\lambda) \equiv 0.$$

Teorema 3.2.19 (Darboux) *Seja M uma variedade de dimensão $2n+1$. Se λ é uma forma de contato e $p \in M$, então existe um sistema de coordenadas $(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n, z)$ em uma vizinhança $U \subset M$ de p tais que*

$$\lambda|_U = dz - \sum_i^n y_i dx_i.$$

O Teorema de Darboux nos garante que em qualquer variedade de dimensão 3 uma forma de contato pode ser escrita localmente como a forma de contato que define a estrutura de contato canônica em $\mathbb{R}^3$. Assim toda estrutura de contato numa vizinhança de uma variedade tem o mesmo comportamento que a estrutura de contato canônica em $\mathbb{R}^3$. A grosso modo podemos dizer que todas as estruturas de contato são localmente "parecidas" com ξ_{can}. Para uma discussão mais detalhada sobre o Teorema de Darboux sugerimos o leitor ver pag 85 de (Ber).

Assim como o Teorema de Darboux o Teorema de Gray é um dos mais significantes teoremas da geometria de contato.

Teorema 3.2.20 (Gray) *Seja M uma variedade diferenciável fechada. Se existe uma família suave a um parâmetro de estruturas de contato ξ_t, $t \in [0,1]$ então existe uma família a um parâmetro de difeomorfismos ϕ_t tal que $\phi_0 = id$ e $\phi_t^*(\xi_t) = \xi_0$, $\forall t \in [0,1]$.*

Lema 3.2.21 *Sejam ω_t, $t \in [0,1]$ uma família suave de k-formas em uma variedade M e ψ_t uma isotopia de M. Defina um campo de vetores X_t (que*

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0510529/CB

depende do tempo t) em M por $X_t \circ \psi_t = \dot{\psi}_t$, onde $\dot{\psi}_t$ denota a derivada de ψ_t com respeito a t (ψ_t é o fluxo de X_t). Então

$$\frac{d}{dt}(\psi_t^* \omega_t) = \psi_t^*(\dot{\omega}_t + \mathcal{L}_{X_t}\omega_t),$$

onde $\dot{\omega}_t = \frac{d\omega_t}{dt}$.

Prova. Seja ω uma k-forma que não depende do tempo. Pela proposição 3.1.24 item 4 temos que

$$\frac{d}{dt}(\psi_t^* \omega) = \psi_t^*(\mathcal{L}_{X_t}\omega).$$

Calculemos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(\psi_t^* \omega_t) &= \lim_{h\to 0} \frac{\psi_{t+h}^* \omega_{t+h} - \psi_t^* \omega_t}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\psi_{t+h}^* \omega_{t+h} - \psi_{t+h}^* \omega_t + \psi_{t+h}^* \omega_t - \psi_t^* \omega_t}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \psi_{t+h}^* \Big(\frac{\omega_{t+h} - \omega_t}{h}\Big) + \lim_{h\to 0} \frac{\psi_{t+h}^* \omega_t - \psi_t^* \omega_t}{h} \\
&= \psi_t^*(\dot{\omega}_t + \mathcal{L}_{X_t}\omega_t).
\end{aligned}$$

□

Prova do teorema 3.2.20. Seja α_t, $t \in [0,1]$, uma família suave a um parâmetro de formas de contato com $\xi_t = \ker \alpha_t$. A equação no teorema se traduz em

$$\phi_t^*(\alpha_t) = \lambda_t \alpha_0,$$

onde $\lambda_t : M \to \mathbb{R}^+$ é uma família suave de funções suaves. A diferenciação dessa equação com respeito a t rende, com ajuda do procedimento do lema 3.2.21

$$\phi_t^*(\dot{\alpha}_t + \mathcal{L}_{X_t}\alpha_t) = \dot{\lambda}_t \alpha_0 = \frac{\dot{\lambda}_t}{\lambda_t}\phi_t^* \alpha_t$$

ou com ajuda da fórmula de Cartan $\mathcal{L}_X = d \circ i_X + i_X \circ d$ e com $\mu_t = \frac{d}{dt}(\log \lambda_t) \circ \phi_t^{-1}$,

$$\phi_t^*(\dot{\alpha}_t + d(\alpha_t(X_t)) + i_{X_t} d\alpha_t) = \phi_t^*(\mu_t \alpha_t).$$

Pode-se mostrar que existe $X_t \in \xi_t$. Logo a equação acima será satisfeita se

$$\dot{\alpha}_t + i_{X_t} d\alpha_t = \mu_t \alpha_t. \tag{3-2}$$

Aplicando a eq. (3-2) ao campo de vetores de Reeb R_{α_t} temos que

$$\dot{\alpha}_t(R_{\alpha_t}) = \mu_t. \tag{3-3}$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0510529/CB

Assim podemos usar a eq. (3-3) para definirmos μ_t. Como M é fechada, podemos recuperar o difeomorfismo ϕ_t resolvendo a equação

$$X_t(\phi_t(p)) = \dot{\phi}_t(p),\ \forall p \in M \text{ e } \phi_0 = id,$$

para todo t. □

Corolário 3.2.22 *Duas estruturas de contato orientadas em uma variedade diferenciável e fechada que são homotópicas no espaço das estruturas de contato em M são contatomorfas.*

Prova. Consequência imediata do teorema de Gray (teorema 3.2.20). □

Teorema 3.2.23 *Toda variedade fechada orientada de dimensão 3 admite uma estrutura de contato.*

O teorema acima foi demonstrado pela primeira vez por Lutz e Martinet. Uma prova de tal teorema pode ser encontrada em (Ge).

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0510529/CB