

Gisela Dornelles Marino

Equações Diferenciais Ordinárias Complexas

Dissertação de Mestrado

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Matemática Pura do Departamento de Matemática da PUC-Rio

Orientador: Prof. Julio César de Souza Rebelo

Rio de Janeiro
Junho de 2007

Gisela Dornelles Marino

Equações Diferenciais Ordinárias Complexas

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Matemática Pura do Departamento de Matemática do Centro Técnico Científico da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

Prof. Julio César de Souza Rebelo

Orientador

Departamento de Matemática — PUC-Rio

Prof. Artur Avila Cordeiro de Melo

Université de Paris VI

Prof. Bruno César Azevedo Scárdua

Instituto de Matemática - UFRJ

Prof. Cesar Leopoldo Camacho Manco

Instituto de Matemática Pura e Aplicada - IMPA

Prof. José Eugenio Leal

Coordenador Setorial do Centro Técnico Científico - PUC-Rio

Rio de Janeiro, 05 de Junho de 2007

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

Gisela Dornelles Marino

Graduou-se em Matemática na Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro em Julho de 2005.

Ficha Catalográfica

Marino, Gisela

Equações Diferenciais Ordinárias Complexas / Gisela Dornelles Marino; orientador: Julio César de Souza Rebelo. — Rio de Janeiro : PUC–Rio, Departamento de Matemática, 2007.

v., 87 f: il. ; 29,7 cm

1. Dissertação (mestrado) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Matemática.

Inclui referências bibliográficas.

1. Matemática – Tese. 2. Folheações Holomorfas. 3. Singularidades. 4. Dinâmica Complexa. I. Rebelo, Julio. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Matemática. III. Título.

CDD: 510

Agradecimentos

Ao Prof. Julio Rebelo, a quem devo grande parte de meu aprendizado em matemática.

Aos professores, colegas e funcionários do Departamento de Matemática da PUC-Rio, pelo apoio e atenção.

À CAPES pelo suporte financeiro.

À minha família, presente em todas as etapas da minha vida. A Ruthvick, pelo incentivo e apoio na fase final deste trabalho.

Resumo

Marino, Gisela; Rebelo, Julio. **Equações Diferenciais Ordinárias Complexas**. Rio de Janeiro, 2007. 87p. Dissertação de Mestrado — Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Neste texto estudamos diversos aspectos de singularidades de campos vetoriais holomorfos em dimensão 2. Discutimos detalhadamente o caso particular de uma singularidade sela-nó e o papel desempenhado pelas normalizações setoriais. Isto nos conduz à classificação analítica de difeomorfismos tangentes à identidade. À seguir abordamos o Teorema de Seidenberg, tratando da redução de singularidades degeneradas em singularidades simples, através do procedimento de “blow-up”. Por fim, estudamos a demonstração do Teorema de Mattei-Moussu, acerca da existência de integrais primeiras para folheações holomorfas.

Palavras-chave

Folheações Holomorfas. Singularidades. Dinâmica Complexa.

Abstract

Marino, Gisela; Rebelo, Julio. **Complex Ordinary Differential Equations**. Rio de Janeiro, 2007. 87p. MsC Thesis — Department of Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

In the present text, we study the different aspects of singularities of holomorphic vector fields in dimension 2. We discuss in detail the particular case of a saddle-node singularity and the role of the sectorial normalizations. This leads us to the analytic classification of diffeomorphisms which are tangent to the identity. Next, we approach the Seidenberg Theorem, dealing with the reduction of degenerated singularities into simple ones, by means of the “blow-up” procedure. Finally, we study the proof of the well-known Mattei-Moussu Theorem concerning the existence of first integrals to holomorphic foliations.

Keywords

Holomorphic Foliations. Singularities. Complex Dynamics.

Sumário

1	Introdução	8
2	Fundamentos	12
2.1	Equações Diferenciais Ordinárias Reais	12
2.2	Equações Diferenciais Ordinárias Complexas	14
2.3	Definições Básicas e Exemplos	17
2.4	O Procedimento de “Blow-up” e algumas Aplicações	25
3	Formas Normais para Singularidades de Folheações Holomorfas	28
3.1	Campos Vetoriais com Autovalores não nulos	29
3.2	Aspectos Elementares de Singularidades Sela-Nó	33
3.3	Algumas Formas Normais em Dimensões mais altas	38
4	Aspectos Avançados de Singularidades	45
4.1	Sela-Nó em Dimensão 2	45
4.2	Redução de Singularidades em Dimensão 2	55
4.3	Existência de Integrais Primeiras	63
5	Conclusão	85