

2

Germes escalares

2.1

E_s e M_s

Todo esse texto trata de teoria local de funções. Assim, domínios não são importantes: quase todos os resultados são válidos para vizinhanças de pontos. É conveniente substituir funções pelos seus *germes*. Sejam U e V abertos de $\mathbb{R}^s$. Seja $x_0 \in W = U \cap V$ e funções $f : U \subseteq \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^t$ e $g : V \subseteq \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^t$ de classe C^∞ . Fazemos $f \sim g$ quando existe um aberto Z contendo x_0 no qual as restrições de f e g coincidem. A classe de equivalência $[f]$ é denominada o *germe de f em x_0* , e diz-se que f e g possuem o mesmo germe em x_0 . Outra notação freqüente é $f : (\mathbb{R}^s, x_0) \rightarrow (\mathbb{R}^t, y_0)$, representando um germe em $x_0 \in \mathbb{R}^s$, que leva x_0 a $y_0 \in \mathbb{R}^t$.

Germes em um mesmo ponto e funções compartilham várias construções, como soma e multiplicação por escalar. A composição $[f] \circ [g]$ é possível, a partir de $f \circ g : (\mathbb{R}^m, x) \xrightarrow{g} (\mathbb{R}^s, y) \xrightarrow{f} (\mathbb{R}^t, z)$, sob as hipóteses naturais da boa definição. Aqui, os domínios e contradomínios explicitam os pontos nos quais as vizinhanças abertas das definições de germe devem ser tomadas: precisamos ter $g(x) = y, f(y) = z$.

De forma análoga, toda função C^∞ admite localmente uma expansão formal em série de Taylor, não necessariamente convergente. Assim, podemos associar ao germe a expansão de um representante. Por outro lado, não faz sentido avaliar um germe de função em um ponto $x \neq x_0$ e escrever $[f](x)$ (a menos que $x = x_0$). Não se perde generalidade ao se fazer $x_0 = 0$. Uma translação no domínio nos dá o caso geral para todas as propriedades de interesse.

Denotaremos por E_s o espaço vetorial dos germes $f : (\mathbb{R}^s, 0) \rightarrow \mathbb{R}$, aonde não exigimos que $f(0) = 0$. É conveniente pensar em E_s como um anel (comutativo, com unidade), esquecendo a multiplicação por escalar. Estaremos interessados em ideais não triviais $\mathcal{I} \subset E_s$, que serão freqüentemente descritos por uma lista de seus geradores, $\mathcal{I} = \langle \mathcal{I}_1, \dots, \mathcal{I}_i, \dots \rangle \cdot E_s$ onde $\mathcal{I}_i \in E_s$, $\forall i \geq 1$. Todo elemento do ideal é combinação linear finita dos seus geradores, com germes

de E_s usados como coeficientes. O ideal $M_s = \{f \in E_s: f(0) = 0\}$, formado pelos germes de E_s que preservam a origem, é especialmente interessante. Vamos obter um conjunto de geradores para M_s : precisamos de uma ferramenta auxiliar.

Lema 2.1 (Hadamard): Seja $U \in \mathbb{R}^s$ aberto contendo a origem. Seja $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave com $f(0) = 0$. Então existem funções suaves $\alpha_i : U \rightarrow \mathbb{R}$ tais que

$$f(x) = f(x_1, \dots, x_s) = \sum_i \alpha_i(x) x_i.$$

Demonstração: Defina $F(u) = f(ux)$. Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, $F(1) = F(0) + \int_0^1 F'(u) du$, ou, em termos de $f(x)$,

$$f(x) = \int_0^1 \frac{d}{du} f(ux) du = \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^s \frac{\partial f(ux)}{\partial x_i} x_i \right) du = \sum_{i=1}^s \left(\int_0^1 \frac{\partial f(ux)}{\partial x_i} du \right) x_i. \blacksquare$$

Proposição 2.1: Sejam f e g germes e $\mathcal{I}$ um ideal de E_s .

- (i) $f \in E_s$ é invertível (como elemento do anel E_s) se e somente se $f(0) \neq 0$.
- (ii) M_s é o único ideal maximal de E_s .
- (iii) $M_s = \langle x_1, x_2, \dots, x_s \rangle \cdot E_s$.

Demonstração:

(i) Necessidade: Suponha f invertível. Então existe $g \in E_s$ tal que $fg = 1$, o que implica em $f(0)g(0) = 1$ e $f(0) \neq 0$.

Suficiência: Seja $f \in E_s$ tal que $f(0) \neq 0$. Então $g = 1/f$ é o inverso de f .

(ii) Seja um ideal $\mathcal{I} \subseteq E_s$ tal que $M_s \subset \mathcal{I} \subseteq E_s$. Podemos então encontrar um $f \in \mathcal{I}$ tal que $f(0) \neq 0$. Por (i) vemos que f é invertível como elemento do anel E_s . Então $1 \in \mathcal{I}$ e qualquer ideal que contenha a unidade contém o anel. Daí $\mathcal{I} = E_s$ e M_s é maximal. Para verificar a unicidade, suponha que $\mathcal{I}$ seja também um ideal maximal de E_s e que $\mathcal{I} \neq M_s$. Portanto, existe $f \in \mathcal{I}$ tal que f não pertence à M_s , ou seja, $f(0) \neq 0$. Por (i) vemos que f é invertível e que $1 \in \mathcal{I}$. Já vimos que: $1 \in \mathcal{I} \Rightarrow \mathcal{I} = E_s$.

(iii) É uma consequência direta do lema acima. $\blacksquare$

Quando o contexto deixar claro, omitiremos a indicação do anel ao qual o ideal pertence. Assim, $M_s = \langle x_1, \dots, x_s \rangle \cdot E_s$ será denotado por $M_s = \langle x_1, \dots, x_s \rangle$. Podemos associar a um germe a expansão em série (formal) de Taylor de um representante. Os germes de $M_s \subset E_s$ são aqueles para os quais o termo constante da série de Taylor em 0 se anula. O ideal M_s^k é uma descrição

algébrica conveniente dos germes de E_s cujas derivadas parciais se anulam até (e inclusive) ordem $(k-1)$.

A partir de M_s calculamos $M_s^2 = M_s \cdot M_s$ (o produto dos ideais $\mathcal{I}$ e J é formado pelas somas de elementos da forma $z_i z_j, z_i \in \mathcal{I}, z_j \in J$). Sejam, por exemplo, x e y as funções coordenadas de $\mathbb{R}^2$. Então

- (a) $M_2^2 = \langle x^2, xy, y^2 \rangle, h \in M_2^2 \stackrel{def}{\Leftrightarrow} h = (x^2 f_1 + xy f_2 + y^2 f_3), f_1, f_2, f_3 \in E_2$.
 (b) $M_2^3 = M_2 \cdot M_2^2 = \langle x, y \rangle \cdot \langle x^2, xy, y^2 \rangle = \langle x^3, x^2 y, xy^2, y^3 \rangle$.

Proposição 2.2: Seja α multi-índice percorrendo os índices de grau total $k = \sum_{i=1}^s \alpha_i$ e o monômio $x = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_s^{\alpha_s}$ com $\langle x \rangle = \langle x_1, \dots, x_s \rangle$.

- (a) $M_s^k = \langle x^\alpha \rangle = \langle x \rangle^k$.
 (b) $h \in M_s^k \Leftrightarrow h = \sum_{\alpha} x^\alpha f_\alpha$ com $f_\alpha(0) \neq 0$.
 (c) $M_s^k \cdot M_s^l = M_s^{k+l}$.

O item (a) mostra que M_s^k é um ideal finitamente gerado de E_s para qualquer $k \in \mathbb{N}$.

Demonstração: Os itens (a) e (b) seguem por indução. Para (c), basta escrever os geradores a partir de (a). ■

Os geradores de M_2^k para $k = 1, 2, \dots$ podem ser arrumados em linhas como no *diagrama de Siersma*.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & & & 1 \\
 & & & & & x & y \\
 & & & x^2 & xy & y^2 & \\
 & & x^3 & x^2 y & xy^2 & y^3 & \\
 & x^4 & x^3 y & x^2 y^2 & xy^3 & y^4 & \\
 x^5 & x^4 y & x^3 y^2 & x^2 y^3 & xy^4 & y^5 & \\
 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 x^k & x^{k-1} y & x^{k-2} y^2 & \dots & x^2 y^{k-2} & xy^{k-1} & y^k
 \end{array}$$

Na primeira linha temos o gerador de E_2 , na segunda os geradores $\langle x, y \rangle$ de M_2 , na terceira os de $M_2^2 = \langle x^2, xy, y^2 \rangle$, e assim por diante. Cada linha é construída a partir da anterior multiplicando-a pelos geradores de $M_2 = \langle x, y \rangle$.

Seja $(E_s)^t = E_s \times \dots \times E_s$ e seja $f \in (E_s)^t$, com coordenadas $f_i \in E_s$, α multi-índice. Seja $j^k f_i$ o germe do polinômio de Taylor de grau k de f_i ,

$$j^k f_i = \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{D^\alpha f_i(0) x^\alpha}{\alpha!}.$$

O k -jato $j^k f$ é a t -upla $j^k f = (j^k f_1, \dots, j^k f_t)$ de germes de polinômios de Taylor de f . Assim, 0-jatos são as aproximações de uma função por uma constante, 1-jatos são transformações afins, 2-jatos são polinômios com termos constantes, lineares e quadráticos. Terminamos a seção com um primeiro exemplo muito simples, que será generalizado de várias formas.

Proposição 2.3 (formas locais em E_1): Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ suave, satisfazendo $f(0) = 0$. Suponha que as primeiras derivadas de f em zero sejam todas nulas até ordem k , isto é, $f(0) = f'(0) = \dots = f^{(k)}(0) = 0 < f^{(k+1)}(0)$. Então existe uma troca de variáveis φ numa vizinhança da origem no domínio (isto é, um difeomorfismo local preservando a origem) tal que $f \circ \varphi = x^k$.

Demonstração: Pelo Lema de Hadamard, $f(x) = x^k g(x)$, onde $g(x)$ é suave, positiva na origem (derivando, é fácil ver que $f^{(k)}(0) = k! g(0)$).

Defina $X = \varphi^{-1}(x) = x(g(x))^{1/k}$. Pelo Teorema da Função Inversa, como a derivada de φ^{-1} na origem não é nula, φ é um difeomorfismo local preservando a origem. Finalmente, $f \circ \varphi(X) = X^k$. ■

Nem os teoremas de função inversa, nem aliás o Lema de Morse (descrito em 2.2 adiante), obteriam essa forma local. Se a função fosse real analítica (ou mesmo analítica), o resultado teria uma demonstração mais imediata: $f(x) = x^k g(x)$ pode ser obtido diretamente da expansão de Taylor de f em 0.

2.2

$\mathcal{R}$ -equivalência em E_s

Agora, descrevemos a primeira de uma série de equivalências entre germes. As equivalências serão definidas em termos de ações de grupos, seguindo a construção descrita no Apêndice. Ao longo do texto, escolheremos grupos G que vão agir sobre conjuntos S de germes. Dado um germe de S , em geral procura-se outro equivalente (isto é, que esteja na mesma órbita da ação de G) que tenha uma representação mais simples.

O passo seguinte também se descreve nessa generalidade. Suponha que o grupo G , o conjunto S e a ação do grupo sobre o conjunto tenham alguma regularidade geométrica. A órbita $\mathcal{O}_f$ por um elemento f , então, pode ser pensada como uma superfície, dotada de um espaço tangente em cada ponto. Considere uma curva suave $g(u)$ no grupo para a qual $g(0) = e$, a identidade do grupo. A imagem de f pela ação dos elementos de $g(u)$ é uma curva $\gamma(u)$ em $\mathcal{O}_f$ e a derivada de $\gamma(u)$ para $u = 0$ pertence ao espaço tangente de $\mathcal{O}_f$ em f .

Informalmente, os elementos do espaço tangente são as alterações infinitesimais que induzem germes equivalentes a f pela ação do grupo.

Esse capítulo é dedicado à ação do grupo $\mathcal{R}(\mathbb{R}^s)$, o conjunto de germes de difeomorfismos locais $\varphi : (\mathbb{R}^s, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^s, 0)$ de classe C^∞ que preservam a origem. Sempre que o contexto permitir, omitiremos $\mathbb{R}^s$ em $\mathcal{R}(\mathbb{R}^s)$. A composição faz de $\mathcal{R}$ um grupo. A função $A : \mathcal{R} \times E_s \rightarrow E_s$ dada por $A(\varphi, f) = f \circ \varphi$ é uma ação de $\mathcal{R}$ em E_s . Seguindo o padrão geral descrito acima, germes $f, g \in E_s$ são $\mathcal{R}$ -equivalentes quando existe $\varphi \in \mathcal{R}$ tal que $f = g \circ \varphi$. É trivial verificar que A é de fato uma ação. A ação mantém o ideal M_s invariante.

Seja $f \in E_s$ e $\varphi(x, u)$, $u \in \mathbb{R}$ uma curva em $\mathcal{R}(\mathbb{R}^s)$ com $\varphi(\cdot, 0) = I_s$, a identidade de $\mathcal{R}(\mathbb{R}^s)$. Pela construção geral, o espaço tangente $T_f^{\mathcal{R}}$ à órbita de f é o conjunto dos germes

$$T_f^{\mathcal{R}} = \left\{ \frac{\partial f \circ \varphi}{\partial u}(x, u)|_{u=0} \right\} \subset E_s.$$

Vamos descrever de forma mais explícita os vetores tangentes. Seja $f_x(x)$ o vetor gradiente $1 \times s$ e $\varphi_u(x, u)$ o vetor $s \times 1$ de derivadas parciais em u de $\varphi(x, u)$. Pela regra da cadeia,

$$\frac{\partial f \circ \varphi}{\partial u}(x, u)|_{u=0} = f_x(\varphi(x, u))\varphi_u(x, u).$$

É fácil ver que uma curva suave $\varphi(x, u)$ com $\varphi(x, 0) = x$ pode ter funções derivadas $\frac{\partial \varphi_j}{\partial u}(x, 0)$ arbitrárias: é só tomar $\varphi(x, u) = x + u[\frac{\partial \varphi_j}{\partial u}(x, 0)]$, onde a expressão entre colchetes denota um vetor com aquela coordenada. Assim, $T_f^{\mathcal{R}}$ é o ideal de E_s gerado pelas funções $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)$, $j = 1, \dots, s$, o chamado *ideal jacobiano* J_f do germe f . Dado um germe, é natural procurar por germes equivalentes entre seus jatos em 0. Um germe f de M_s é *k-determinado* na $\mathcal{R}$ -órbita quando f e seu k -jato $j^k f$ são $\mathcal{R}$ -equivalentes. Um germe f é *finitamente determinado* se para algum k temos que f é k -determinado. Perto da origem, um germe k -determinado possui o comportamento qualitativo de um polinômio, seu k -jato.

A Proposição 2.3 identifica os germes k -determinados de E_1 . O Teorema da Função Implícita e o Lema de Morse, descritos a seguir, são os exemplos habituais de classificação de germes por k -determinação.

Forma Local das Submersões (FLS): Seja $f \in M_s$. A FLS afirma que, se a jacobiana $f_x(0)$ é sobrejetora, então f é 1-determinado. Além disso, f é $\mathcal{R}$ -equivalente ao germe da projeção $(x_1, \dots, x_s) \mapsto x_1$. Num vocabulário mais

familiar, na vizinhança de um ponto regular x_0 , isto é, um ponto no qual $f_x(x_0)$ é sobrejetora, $f : \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}$ é uma projeção (mais uma constante), depois de troca de variável no domínio preservando x_0 .

Lema de Morse: Seja 0 um ponto crítico não-degenerado de $f \in M_s^2$, isto é $f_x(0) = 0$, com Hessiana $Hf(0)$ invertível. Suponha $f(x) = \frac{1}{2}x^T Hf(0)x + R(x)$, onde $R(x)$ varia quadraticamente com x . Então o germe f é 2-determinado: $f \stackrel{\mathcal{R}}{\sim} \frac{1}{2}x^T Hf(0)x$. Mais, f é também $\mathcal{R}$ -equivalente ao germe $g(x) = x^T D x$, onde D é uma matriz diagonal tendo como entradas diagonais os números ± 1 .

O resultado principal desse capítulo é o Teorema 2.1, que descreve uma condição suficiente para k -determinação por $\mathcal{R}$ -equivalência. A partir do teorema, seguem a FLS em E_s e o Lema de Morse, no sentido que o teorema comprova a equivalência do germe com seus 1- ou 2-jatos, respectivamente. As versões mais finas são apenas ajustes simples usando argumentos de álgebra linear. Antes de tratar do teorema geral, apresentamos um exemplo, para perceber a dificuldade inerente a um teorema de k -determinação.

Seja $f(x, y) = x^2 + y^3$. Então o germe f é 3-determinado em sua $\mathcal{R}$ -órbita. Para ver isso, temos que mostrar que qualquer deformação de f por um perturbação quártica $p \in M_2^4$ permanece na mesma $\mathcal{R}$ -órbita de f . Considere o germe $g(x, y) = f(x, y) + p(x, y)$: temos que mostrar que $f \stackrel{\mathcal{R}}{\sim} (f + p)$, o que equivale a encontrar $\varphi \in \mathcal{R}$ tal que $(f + p)(\varphi(x)) = f(x)$. Para simplificar o argumento, vamos supor que tanto f quanto g são germes reais analíticos. Denote a série de Taylor para $p(x, y)$ por

$$p(x, y) = a_1 x^4 + a_2 x^3 y + a_3 x^2 y^2 + a_4 x y^3 + a_5 y^4 + \dots$$

e agrupe os monômios na forma

$$p(x, y) = x^2(a_1 x^2 + a_2 x y + a_3 y^2 \dots) + y^3(a_4 x + a_5 y + \dots),$$

o que aliás pode ser feito de várias maneiras diferentes, todas uniformemente convergentes. Substituindo,

$$g(x, y) = (f + p)(x, y) = x^2(1 + a_1 x^2 + a_2 x y + a_3 y^2 \dots) + y^3(1 + a_4 x + a_5 y + \dots).$$

Agora, defina

$$X(x, y) = x(1 + a_1 x^2 + a_2 x y + a_3 y^2 \dots)^{\frac{1}{2}},$$

$$Y(x, y) = y(1 + a_4 x + a_5 y + \dots)^{\frac{1}{3}},$$

onde as raízes são escolhidas como sendo germes positivos (estamos operando perto da origem!). Seja $\varphi(x, y) = (X(x, y), Y(x, y))$: vamos ver que $\varphi \in \mathcal{R}(\mathbb{R}^2)$. Certamente, φ é suave e preserva a origem. Observe que a jacobiana $D\varphi(0, 0)$ é

a identidade: pelo Teorema da Função Inversa, φ é um elemento de $\mathcal{R}$. Então, f é 3-determinado, já que $f(\varphi(x, y)) = f(X(x, y), Y(x, y)) = (f + p)(x, y)$.

O mesmo argumento poderia ser usado para considerar perturbações p um pouco mais gerais. Seria possível, por exemplo, acrescentar monômios múltiplos de x^3 ou x^2y , por exemplo. Assim, k -determinação pode ser tomada como um ponto de partida para formas normais ainda mais simples.

Perturbações suaves, mas não mais analíticas, exigem um pouco mais de trabalho: em vez de expandir em Taylor, é necessário aplicar o Lema de Hadamard, essencialmente uma série de Taylor com resto, para validar as definições análogas de X e Y .

Teorema 2.1: Seja $f \in M_s$ com ideal jacobiano $J_f = \langle f_{x_1}, \dots, f_{x_s} \rangle$. Suponha que $M_s^k \subseteq M_s J_f$. Então f é k -determinado em sua $\mathcal{R}$ -órbita.

Demonstração: Sejam f e $f + p$ germes com mesmo k -jato, $p \in M_s^{k+1}$. O segmento de reta entre os dois germes permanece em M_s . Para $u_0 \in [0, 1]$ fixo, seja $\tilde{f} = f + u_0 p$. Veremos que germes no segmento suficientemente próximos a $\tilde{f}$ são $\mathcal{R}$ -equivalentes. A tese — a equivalência entre f e $f + p$ — segue então por um argumento habitual combinando compacidade e conexidade.

A equivalência entre $\tilde{f} + up$ e $\tilde{f}$ corresponde à existência de um germe de difeomorfismo $\varphi(\cdot, u) \in \mathcal{R}$ para o qual $(\tilde{f} + up)(\varphi(x, u)) = \tilde{f}(x)$. Lembre que u é um número pequeno. Levando em conta a exigência $\varphi(x, 0) = x$, a existência de φ é equivalente a resolver a equação diferencial

$$\tilde{f}_x(\varphi(x, u))\varphi_u(x, u) + p(\varphi(x, u)) + u p_x(\varphi(x, u))\varphi_u(x, u) = 0.$$

Aqui, pensamos as derivadas em x como sendo vetores gradientes horizontais. Não estamos em condições de garantir existência para essa equação diferencial porque o coeficiente de φ_u não é necessariamente diferente de zero. Temos que empregar a informação algébrica sobre a perturbação p para prosseguir.

Afirmção 1: $J_{\tilde{f}} = J_f$.

Lembre que os geradores de J_f são as colunas da jacobiana $f_x(x)$. Vamos ver que $J_{\tilde{f}} \subseteq J_f$:

$$J_{\tilde{f}} = \langle f_x + u_0 p_x \rangle \subseteq \langle f_x \rangle + \langle p_x \rangle = J_f + M_s^k,$$

pois a inclusão $p \in M_s^{k+1}$ implica $p_{x_i} \in M_s^k$. Por hipótese, $M_s^k \subseteq M_s J_f$, logo $J_{\tilde{f}} \subseteq J_f + M_s J_f = J_f$.

Falta ver que $J_f \subseteq J_{\tilde{f}}$. Seja $h \in J_f$, isto é, $h = f_x \gamma$ para um vetor $\gamma \in E_s$.

Então

$$h = (f_x + u_0 p_x)\gamma - u_0 p_x \subseteq J_{\tilde{f}} + \langle p_x \rangle.$$

Logo $J_f \subseteq J_{\tilde{f}} + \langle \frac{\partial p}{\partial x} \rangle \subseteq J_{\tilde{f}} + M_s J_f$, por hipótese. Fazendo $A = J_f$, $B = J_{\tilde{f}}$, $M = M_s$ no Lema de Nakayama como fraseado no Apêndice, concluímos que $J_f \subseteq J_{\tilde{f}}$.

Afirmção 2: $p \in M_s J_f = M_s J_{\tilde{f}}$ e $p_{x_i} \in J_f = J_{\tilde{f}}$, $i = 1, \dots, s$.

Tanto p quanto p_{x_i} são germes em M_s^k , como já vimos. Mas, por hipótese, $M_s^k \subseteq M_s J_f \subset J_f$. As igualdades seguem da primeira afirmação.

Voltamos à demonstração do teorema. Pela segunda afirmação, ainda mantendo gradientes como vetores horizontais, $p(y) = \tilde{f}_x(y)\beta(y)$ e $p_x(y) = \tilde{f}_x \alpha(y)$, onde β é um vetor s -dimensional e α é uma matriz $s \times s$, com elementos em M_s e E_s , respectivamente. A equação diferencial se torna

$$\tilde{f}_x(\varphi(x, u))[(I + u \alpha(\varphi(x, u))) \varphi_u(x, u) + \beta(\varphi(x, u))] = 0,$$

onde I é a matriz identidade $s \times s$. Para isso, basta exigir

$$(I + u \alpha(\varphi(x, u))) \varphi_u(x, u) = -\beta(\varphi(x, u))$$

e agora sim, para u e x suficientemente pequenos, estamos nas hipóteses do teorema de existência de soluções de EDO's, já que então $A = (I + u \alpha)$ é invertível (lembre que $\varphi(x, 0) = x$). Mais, a solução da equação diferencial, nesse pequeno intervalo aberto contendo u_0 é tal que $\varphi(0, u) = 0$. Isso segue também do teorema de existência (melhor, de unicidade), uma vez que sabemos que $\beta(0) = 0$: por construção, $\beta \in M_s$.

Assim, quaisquer dois germes no intervalo ligando f a $f + p$ que sejam suficientemente próximos são $\mathcal{R}$ -equivalentes. Por compacidade, um número finito de classes de equivalência cobre $[0, 1]$ e, por conexidade, existe uma só: f e $f + p$ são então equivalentes. ■

Existem alternativas à hipótese de k -determinação. Se $M_s^{k-1} \subseteq J_f$, é claro que vale a hipótese $M_s^k \subseteq M_s J_f$. Se $M_s^k \subseteq M_s J_f + M_s^{k+1}$ novamente temos $M_s^k \subseteq M_s J_f$, agora pelo Lema de Nakayama. Em certos casos, essas hipóteses são mais simples de verificar.

Voltamos à Forma Local das Submersões em E_s : o caso geral será tratado no próximo capítulo.

Forma Local das Submersões em E_s : Seja $f \in M_s$ não-singular (i.e., f não pertence a M_s^2). Então f é 1-determinado.

Demonstração: Como f não é singular, alguma derivada parcial f_{x_i} não é nula na origem. Assim, seu ideal jacobiano J_f tem um elemento invertível: pela Proposição 2.1, J_f é o próprio E_s . A condição suficiente para 1-determinação, $M_s \subseteq M_s J_f$, se torna óbvia.

Portanto f é determinado pelo seu 1-jato $j^1 f(x) = f_x(0)x = \langle a, x \rangle$, para o vetor $a = f_x(0)$. Seja $T : \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^s$ uma transformação linear ortogonal levando o vetor canônico e_1 à normalização de a . Pela regra da cadeia, $\tilde{f} = f \circ T$ tem derivada $\tilde{f}_x(0)v = \langle a, Tv \rangle$. Assim, a derivada direcional ao longo de $v = e_1$ é não nula, e qualquer derivada direcional ao longo de vetores ortogonais a e_1 é igual a zero. Em outras palavras, $\tilde{f}_x(0)$ é um múltiplo não nulo de e_1 , e o germe original f é equivalente à projeção $x \mapsto x_1$. ■

Agora, o Lema de Morse também se torna um problema de álgebra linear.

Lema de Morse: Seja $f \in M_s^2$ e $Hf(0)$ invertível. Então f é $\mathcal{R}$ -equivalente a seu 2-jato.

Demonstração: Pelo Teorema 2.1, a condição suficiente para 2-determinação do germe f é dada por $M_s^2 \subseteq M_s J_f$. Vamos ver que $J_f = M_s$, o que certamente basta. A inclusão $J_f \subseteq M_s$ decorre de $f \in M_s^2$ pois isto implica que $f_{x_i} \in M_s$, $\forall i = 1, \dots, s$. Temos que mostrar que $M_s = \langle x_1, \dots, x_s \rangle \subset J_f = \langle f_{x_1}, \dots, f_{x_s} \rangle$. Considere o germe dado pelo jacobiano de f , $f_x : (\mathbb{R}^s, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^s, 0)$. Seu jacobiano na origem é a Hessiana $Hf(0)$ de f , que é invertível por hipótese. Assim, pelo Teorema de Função Inversa, f_x é um difeomorfismo local perto da origem, e existe um outro difeomorfismo local φ — a inversa de f_x — tal que $\varphi \circ f_x(x) = x$. Assim, para cada i , $x_i = \varphi_i(f_{x_1}, \dots, f_{x_s})$. Como $\varphi_i \in M_s$, basta aplicar o Lema de Hadamard para concluir que $x_i \in J_f$. Assim, $M_s = J_f$ e f é determinado pelo seu 2-jato $(j^2 f)(x) = \frac{1}{2}((Hf(0)x, x))$ ■

A formulação habitual do Lema de Morse agora segue do teorema espectral: diagonalize $Hf(0) = Q^T D Q$, onde Q é uma matriz ortogonal e D é diagonal, que por sua vez se escreve $D = A E A$, para matrizes diagonais A e E , onde E só tem entradas iguais a 1 , 1 ou -1 , e as posições diagonais de A são estritamente positivas. Então

$$2j^2 f(x) = x^T Hf(0)x = x^T Q^T A E A Q x = (A Q x)^T E (A Q x) = y^T E y,$$

depois da troca de variáveis $y = A Q x$.

Vamos considerar alguns exemplos de k -determinação.

- 1) $f(x, y) = x^3 + y^3 \Rightarrow J_f = \langle x^2, y^2 \rangle \Rightarrow M_2 J_f = \langle x^3, yx^2, xy^2, y^3 \rangle = M_2^3$.
Daí $M_2^3 = M_2 J_f$ e f é 3-determinado.

2) Para $f(x, y) = x^3 + y^3$, $J_f = \langle x^2, y^2 \rangle$ e, como antes, $M_2^3 \subseteq M_2 J_f$, logo f é 3-determinado.

3) Os últimos exemplos nos induzem a concluir que $f = x^r + y^r$ é r -determinado, mas isso não é verdade. Seja $r \geq 4$. Então $J_f = \langle x^{r-1}, y^{r-1} \rangle$ e

$$M_2^{2r-3} = \langle x^{2r-3}, x^{2r-4}y, x^{2r-5}y^2, \dots, xy^{2r-4}, y^{2r-3} \rangle,$$

$$M_2^{r-2} = \langle x^{r-2}, x^{r-3}y, x^{r-4}y^2, \dots, x^2y^{r-3}, y^{r-2} \rangle.$$

Por uma conta simples, $M_2^{2r-3} = M_2^{r-2} J_f \subset M_2^2 J_f$, e f é $(2r-4)$ -determinado. Contudo o monômio $x^{r-2}y^{r-2}$ não pertence a $M_2 J_f$. Então:

$M_2^{2r-4} \not\subset M_2 J_f$ e f não é $(2r-5)$ -determinado. Por exemplo $f = x^5 + y^5$ é 7-determinado mas não 5-determinado. É conveniente representar essas contas em diagramas de Siersma.

4) Seja $f \in E_1$. Então, pela Proposição 2.3, a primeira derivada não nula dá a ordem de k -determinação de f : se, por exemplo, $f(0) = 0, f_x(0) = 0$ mas $f_{xx}(0) \neq 0$, então f é 2-determinado.

5) Existem germes em E_s que não são finitamente determinados. Um exemplo é $f(x) = \exp(-1/x^2)$, que não é finitamente determinado em 0 porque todos os coeficientes de sua série de Taylor são nulos em 0. Mas existem germes analíticos simples que não são finitamente determinados. Um exemplo é $f(x) = x^2 y$. É claro que $\mathcal{R}$ -equivalência não muda o tipo topológico das raízes perto da origem. Entretanto, as raízes desse germe estão nos dois eixos e uma perturbação como $g(x, y) = x^2 y + y^{2007}$ tem suas raízes apenas no eixo horizontal.