PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0511105/CA

4
A modelagem estocástica

A utilização da metodologia de opções ficou, durante muito tempo, limitada a ativos financeiros que possuíam dados abundantes, e o preço de mercado do ativo subjacente era diretamente perceptível. A utilização de equações diferenciais estocásticas reforçava a dificuldade para o uso em aplicações gerenciais.

A facilidade do acesso à atual tecnologia computacional pode ser considerada o fator de maior estímulo à utilização de opções em avaliações "não financeiras". Enquanto grande parte das opções financeiras pode ser avaliada pelo modelo *Black-Scholes-Merton*, as opções reais possuem particularidades que as afasta da avaliação por este modelo. Ankum e Smit (1993, p.243) destacam as divergências entre as opções: A opção financeira é exclusiva ao investidor, nenhuma outra pessoa pode exercer a opção por ele. A opção real depende da característica do mercado e pode existir mais de uma empresa detendo a mesma opção real.

A maior dificuldade ao analisar uma opção real, é o fato de, na maioria das vezes, o ativo-objeto da opção real não ser comercializado no mercado. Um caminho para superar esta restrição é a utilização da técnica do portfólio replicado (*Contigent Claims Analysis*)[4].

Algumas questões sobre a modelagem estocástica serão abordadas nas próximas seções, como por exemplo:

i) A definição de modelagem estocástica;

ii) Os tipos de modelagem estocástica mais utilizados;

iii) A utilização da modelagem estocástica como aproximação de modelos de previsão; e

iv) O modelo estocástico utilizado nesta dissertação para a projeção dos preços dos insumos e produtos finais.

---

[4] Para maiores informações sobre portfólio replicado ver Dixit e Pindyck, (1996, p. 114).

4.1.
Definição

Um processo estocástico é uma variável que se comporta, durante o tempo, de uma maneira onde pelo menos parte é considerada randômica. De maneira mais formal, é definido pela probabilidade da evolução x_t da variável x durante o tempo t. Para instantes t_1, t_2 e t_3 nos é fornecida, ou calculada a probabilidade dos valores correspondentes x_1, x_2 e x_3, estarem numa faixa específica de valores, por exemplo:

$$Prob(\ a_1<x_1<b_1;\ a_2<x_2<b_2;\ a_3<x_3<b_3;...)$$

Quando o tempo t_1 chegar e observarmos o valor correspondente de x_1, poderemos condicionar a probabilidade dos eventos futuros baseado nesta informação.

Um processo estocástico pode ser classificado como um processo em tempo discreto ou em tempo contínuo. Um processo estocástico em tempo discreto é aquele em que o valor da variável só varia em um determinado instante de tempo. Esta variável é classificada com variável discreta. Já um processo em tempo contínuo, a variável assume valores a qualquer instante de tempo, por isso é chamada de variável contínua.

Dois pequenos exemplos podem definir o que é um processo estocástico: A variação ao longo do tempo da temperatura de uma determinada cidade é parcialmente determinística (elevação durante o dia e queda à noite, ou até mesmo elevação durante o verão e queda durante o inverno) e parcialmente imprevisível. Um outro exemplo pode ser o preço de uma determinada ação de uma empresa cotada em bolsa de valores (seu preço flutua aleatoriamente, mas no longo prazo se tem uma taxa esperada de crescimento positiva que compensa o risco de um investidor em carregar esse papel).

Ambos os exemplos são processos que diferem um do outro. A temperatura de uma determinada cidade é o chamado processo estacionário, ou seja, as propriedades estatísticas desta variável são constantes durante longos períodos de tempo. Isto quer dizer que apesar da temperatura do dia seguinte desta cidade ser, em grande parte, dependente da temperatura do dia anterior, a expectativa e variância da temperatura nos meses de inverno são iguais à expectativa e variância da temperatura do inverno de dois anos atrás. Já o preço da ação de uma empresa é um processo não-estacionário. O valor esperado do

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0511105/CA

preço pode crescer sem grandes elevações e a variância do preço daqui a T anos, cresce na mesma proporção T.

Embora os dois exemplos abordados tratem de processos estocásticos diferentes, estes processos possuem uma característica em comum muito importante: Ambos os processos são contínuos no tempo, no sentido em que a variável tempo é contínua, ou seja, mesmo estando preocupados com os valores a serem medidos, temperatura e preço, essas variáveis estão continuamente variando com o tempo.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0511105/CA

4.2. Principais processos estocásticos

Ao invés de simplesmente destacar os principais modelos de processos estocásticos, enfatizaremos a abordagem sobre o chamado processo de *Wiener*[5], também conhecido como Movimento Browniano (*Brownian Motion*). Um movimento Browniano é um processo estocástico em tempo contínuo e possui três importantes propriedades:

i) É um processo de Markov (*Markov process*). O processo estocástico de Markov é um caso particular de processo estocástico, onde somente o valor atual de uma variável é relevante para se prever seu valor futuro. Os dados históricos desta variável e a maneira de como esta "emergiu" do passado são irrelevantes;

ii) A distribuição de probabilidade da variável aleatória em qualquer instante de tempo futuro depende, unicamente, de seu atual valor. Pode-se dizer com isso que um processo de Wiener possui *incrementos independentes*; e

iii) Mudança durante qualquer intervalo de tempo são normalmente distribuídas, onde a variância cresce linearmente durante o tempo.

Os preços de uma ação de uma empresa são normalmente modelados como um processo de Markov e informações de mercado são rapidamente incorporadas no valor atual desta ação, sendo que toda a informação histórica não possui peso para a previsão de seus valores futuros.

Essas três propriedades abordadas sobre o processo de Wiener parecem restringir o número de variáveis do mundo real. É de se perceber que enquanto um processo de Markov parece modelar, razoavelmente, o valor dos preços futuros de uma ação, não nos parece razoável que esses preços sejam normalmente distribuídos, uma vez que o preço de uma ação nunca poderá ser menor que zero. Com isso, sugere-se que os preços de uma ação possuem uma distribuição *lognormal*, ou seja, mudanças no logaritmo dos preços de uma ação são normalmente distribuídos[6].

As propriedades quantitativas do processo de Wiener são apresentadas:

---

[5] Robert Wiener (1923) desenvolveu a teoria matemática proposta por Albert Einstein chamada de *Brownian Motion*.

[6] É utilizado logaritmo natural (Logaritmo de base *e*).

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0511105/CA

⇨ $\Delta z = \varepsilon_t \sqrt{\Delta t}$, onde ε_t é uma variável aleatória normalmente distribuída com média zero e desvio-padrão um.

⇨ A variável ε_t não possui correlação, ou seja, $\mathrm{E}[\varepsilon_t \varepsilon_s] = 0$ para t ≠ s. O valor de Δz para qualquer dois intervalos de tempo distintos são independentes.

Fazendo com que Δz seja infinitamente pequeno, dz, o incremento de Wiener poderá ser representado, em tempo contínuo, como:

$$dz = \varepsilon_t \sqrt{dt} \; , \tag{1}$$

Onde ε_t possui média zero e desvio padrão um. Note que dz tende a infinito à medida que dt se aproxima de zero.

4.2.1. Movimento Aritmético Browniano

Um processo estocástico é caracterizado pela composição de dois termos principais: O primeiro termo é chamado de tendência *α* (*drift*) e o segundo é chamado de termo aleatório *σ*. No entanto, esses processos podem ser decompostos por mais de dois termos, o que é objeto desta dissertação e é conhecido como *processo de reversão à média com saltos*[7].

Vejamos a seguir a generalização mais simples de um processo estocástico:

$$dx = a(x,t)dt + b(x,t)dz \; , \tag{2}$$

Onde a(x,t)= α; b(x,t)= σ, no caso do Movimento Aritmético Browniano, e dz é o já conhecido incremento de Wiener.

Qualquer mudança em x durante um intervalo de tempo Δt tem distribuição normal com valor esperado $E(\Delta x) = \alpha \times \Delta t$ e variância $V(\Delta x) = \sigma^2 \times \Delta t$. Em outras palavras, o movimento do desvio-padrão *σ* será muito maior que o termo de tendência *α*: se Δt é pequeno, $\Delta t^{1/2}$ será muito maior que Δt. Isto determina um comportamento serrilhado dos caminhos do processo de Wiener.

[7] Este processo será abordado na seção 4.4 e será tema principal do presente estudo.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0511105/CA

A figura 5 ilustra o movimento aritmético browniano (*Brownian Motion with Drift*) com crescimento linear com taxa *α* e desvio-padrão *σ*:

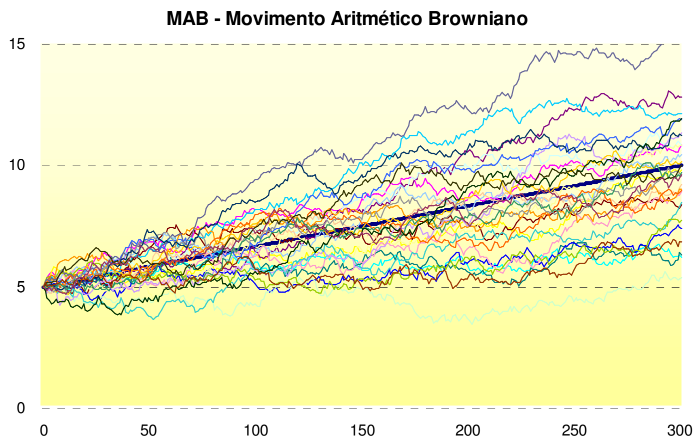

Figura 5 - Movimento Aritmético Browniano (MAB)

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0511105/CA

4.2.2.
Movimento Geométrico Browniano

O movimento geométrico browniano (*Geometric Brownian Motion with drift*) é um importante processo, pois é o mais utilizado na modelagem de preços de ativos.

Neste processo, a(x,t)= αx e b(x,t)= σx, onde *α* e *σ* são constantes. Desta forma, é obtida a seguinte equação:

$$dx = axdt + \sigma xdz \tag{3}$$

As mudanças do valor de x, em termos percentuais - Δx/x, são distribuídas normalmente. No entanto, mudanças no logaritmo natural de x, em termos absolutos de x, possuem distribuição lognormal. Esta é uma observação fundamental, pois permite que os preços de um ativo sejam sempre positivos.

O valor esperado e a variância seguem as seguintes expressões, respectivamente:

$$E(x_t) = x_0 \times e^{\alpha \times t} \tag{4}$$

$$V(x_t) = x_0^2 \times e^{2\times\alpha\times t}(e^{\sigma^2 \times t} - 1) \tag{5}$$

A figura 6 ilustra o movimento geométrico browniano (*Brownian Motion with Drift*) com crescimento linear *α* e desvio-padrão *σ*:

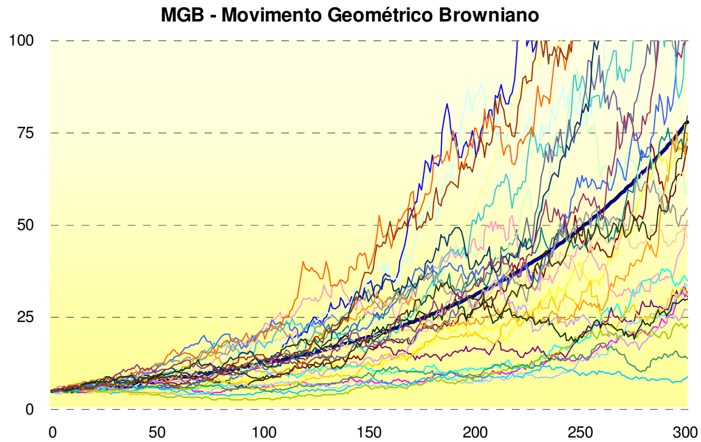

Figura 6 - Movimento Geométrico Browniano (MGB)

4.2.3. Movimento de Reversão à Média

Até esse ponto, alguns tipos de variáveis econômicas, como por exemplo, os preços de uma ação, requerem uma modelagem estocástica específica. No entanto, para outros tipos de variáveis econômicas, como o preço de commodities, estes mesmos processos não apresentam uma modelagem ideal, embora, muitas vezes, sejam os mais utilizados.

Para equacionar uma modelagem mais apropriada a cada tipo de variável, o movimento de reversão à média sugere que, embora os preços no curto prazo possam flutuar, para cima ou para baixo, no longo prazo esses preços tendem a ser trazidos de volta ao custo marginal de se produzir, por exemplo, petróleo. Desta forma, é dito que uma determinada variável tem um comportamento de reversão à média.

O modelo estocástico de reversão à média mais simples é conhecido como modelo de *Ornstein-Uhlembeck* e pode ser apresentado através da seguinte equação:

$$dx = \eta(\bar{x} - x)dt + \sigma dz \,, \tag{6}$$

Onde η é a velocidade de reversão e $\bar{x}$ é a média de longo prazo do custo marginal, em outras palavras, é o nível em que x tende a convergir.

Observa-se que através desta equação que o valor esperado de x depende da diferença entre x e $\bar{x}$. Se x é maior(menor) que $\bar{x}$, é mais provável que haja uma queda(crescimento) no próximo intervalo de tempo.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0511105/CA

Uma importante observação é que embora o movimento de reversão à média satisfaça as propriedades do processo de Markov, este movimento não possui incrementos independentes.

O valor esperado e a variância deste processo são calculados através das seguintes expressões, respectivamente:

$$E(x_t) = \bar{x} + (x_0 - \bar{x}) \times e^{-\eta \times t} \tag{7}$$

$$Var[x - \bar{x}] = \frac{\sigma^2}{2\eta} \times (1 - e^{-2 \times \eta \times t}) \tag{8}$$

Das expressões 7 e 8, pode-se concluir que:

i) O valor esperado de x_t converge para $\bar{x}$ à medida que t aumenta e a variância converge para $\frac{\sigma^2}{2\eta}$;

ii) Se a velocidade de reversão, η, converge para infinito, $Var[x_t] \rightarrow 0$, o que significa que x nunca irá desviar de $\bar{x}$, mesmo que momentaneamente; e

iii) Caso $\eta \rightarrow 0$, x se torna um MAB com $Var[x_t] = \sigma^2 \times t$.

A figura 7 ilustra o movimento de reversão à média:

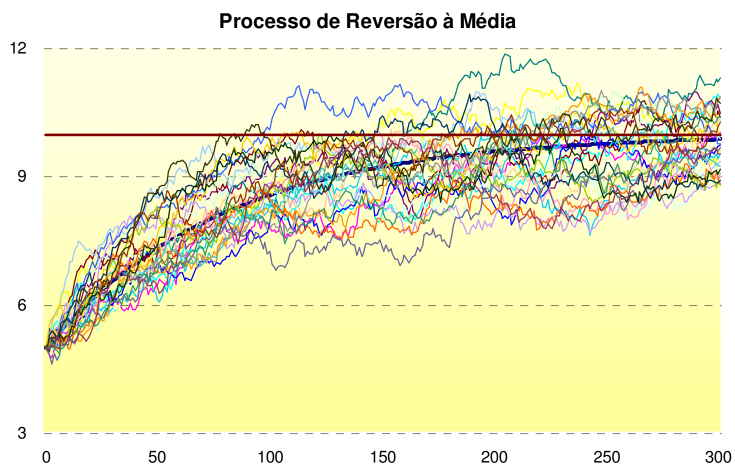

Figura 7 - Movimento de Reversão à Média (MRM)

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0511105/CA

4.3. Lema de Itô

A modelagem desses processos estocásticos requer a utilização do cálculo diferencial, e para se trabalhar com esses processos, é extremamente necessária à utilização do chamado Lema de Itô, às vezes conhecido como o teorema fundamental do cálculo estocástico. O uso do Lema de Itô, também conhecido como processo de Itô, é extremamente importante, pois para descrever o valor de uma opção de investimento é necessário determinar o tipo de processo estocástico desta opção.

A melhor maneira de se compreender este teorema é recorrer à expansão de Taylor do cálculo ordinário. Suponha que x(t) siga um processo estocástico e considere a função F(x,t) que é duas vezes diferenciável em x e uma vez em t. O objetivo principal é encontrar dF. O cálculo diferencial define dF em termos de mudanças de primeira ordem em x e t, a saber:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial t} dt \; . \tag{9}$$

Com a expansão dos termos de ordem superior, é obtida a equação da expansão de Taylor:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \times \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} (dx)^2 + \frac{1}{6} \times \frac{\partial^3 F}{\partial x^3} (dx)^3 + \ldots . \tag{10}$$

No cálculo ordinário, os termos de ordem superior são desconsiderados, pois dt^n é cada vez menor, ou seja, tendem a zero mais rápido que dt. No entanto, o Lema de Itô não despreza o termo $(dx)^2$ por ser considerado de ordem dt se X for uma variável estocástica. Com isso, obtemos dF para o cálculo diferencial:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \times \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} (dx)^2 \; . \tag{11}$$

O Lema de Itô nos permitirá descrever as relações entre a variável de interesse (F) e as variáveis de estado (X,t), onde X é um vetor de variáveis estocásticas (valor do ativo básico V e investimento I), que seguem processos

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0511105/CA

estocásticos específicos. A seguir uma pequena demonstração de como escrever essas relações:

Seja uma variável estocástica P, seguindo um movimento geométrico browniano: $dP = \alpha P dt + \sigma P dz$ e sabendo que $(dP)^2 = \sigma^2 P^2 dt$. É válido lembrar que $(dP)^2$, desprezado no cálculo ordinário, é considerado no calculo estocástico por ser de Ordem dt[8].

Seja uma variável p, dada pela função: $p = \ln P$.

Para encontrar a equação estocástica que descreve dp, utilizaremos o lema de itô (equação 11) e as seguintes derivadas: $\frac{\partial p}{\partial t} = 0$, $\frac{\partial p}{\partial P} = \frac{1}{P}$ e $\frac{\partial^2 p}{\partial P^2} = -\frac{1}{P^2}$.

Aplicando a equação 11 para p(P,t), teremos:

$dp = \frac{1}{P} dP - \frac{1}{2} \times \frac{1}{P^2} (dP)^2 \quad \Rightarrow \quad dp = \frac{1}{P} dP - \frac{1}{2} \times \frac{1}{P^2} (dP)^2$, substituindo $(dP)^2$, $dp = \alpha \times dt + \sigma \times dz - \frac{1}{2}\sigma^2 dt$, rearranjando os termos, temos: $dp = (\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2) dt + \sigma \times dz$.

[8] A comprovação de que o termo $(dP)^2$ é de ordem dt será mostrada no Apêndice.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0511105/CA

4.4. Movimento de Reversão à Média com Saltos

Até agora, foram apresentadas as características e aspectos de como os principais processos estocásticos são formados. Nesta seção, estudaremos o *processo estocástico de reversão à média com saltos* mencionado na seção 4.2.1. e utilizar suas propriedades para a estimação dos parâmetros e projeção de preços que serão utilizados nesta pesquisa.

Muitas vezes, no entanto, a maneira mais realística de se modelar uma variável econômica é atribuir, em seu processo de estimação, saltos discretos, mesmo que não sejam tão freqüentes. As possíveis causas de um salto aleatório podem ser: a entrada de um novo competidor no mercado de poucas firmas, fazendo com que os preços caiam repentinamente. Outro exemplo de grande importância pode ser o conflito armado entre nações detentoras de importantes reservas de óleo (Guerra do Golfo – anos 90 e Guerra do Iraque – Março/2003).

Pode-se dizer que informações de mercado consideradas "normais" causam um processo de reversão à média contínuo nos preços. Por outro lado, informações consideradas "anormais" provocam saltos (discretos) de tamanho aleatório.

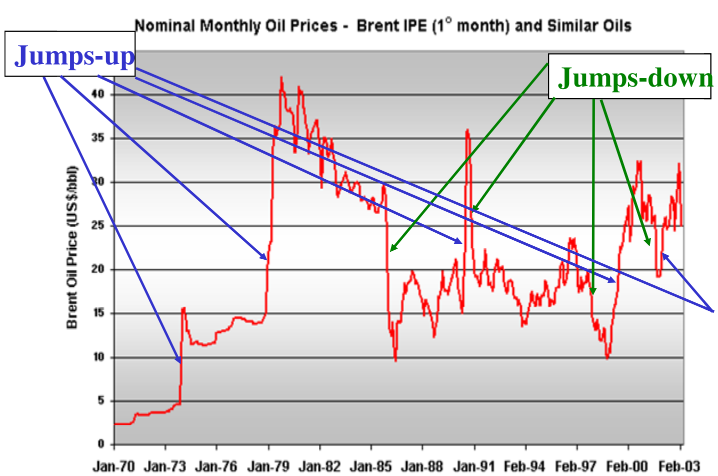

Figura 8 - Preços nominais do óleo Brent e similares – período mensal (1970 a 2003)

O gráfico acima ilustra claramente este tipo de modelagem estocástica, onde fatores considerados "anormais" causaram choques nos preços do óleo *Brent*. Saltos positivos podem ser observados nos anos 1973/1974 devido à guerra do *Yom Kippur* e embargos sobre o petróleo. Em 1979/1980 podem-se destacar a guerra Irã e Iraque e a revolução iraniana. Nos anos noventa, a

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0511105/CA

invasão no Kuwait pelo Iraque, e por fim em 1999 um choque na demanda de petróleo por parte da O*PEC*[9] *e* aliados. Já nos anos de 1986, 1991 e 1997, onde a "guerra" de preços, a guerra do golfo e a crise asiática, respectivamente, provocaram saltos negativos nos preços. Especialistas do setor indicam que esses saltos levaram de um a três meses para serem absorvidos no preço da *commodity*.

4.4.1. O modelo

Para modelar o processo de reversão à média com saltos, utiliza-se o modelo de *Ornstein-Uhlembeck* que foi apresentado na seção 4.2.3. A partir da equação 6, adiciona-se o termo dos saltos aleatórios. Sendo assim, é obtida a seguinte equação:

$$dx = \eta(\bar{x} - x)dt + \sigma dz + dq \qquad (12)$$

O termo dq adicionado é modelado como um processo de *Poisson*, de tamanho aleatório e independente do incremento dz.

Essa equação diz que existe uma força de reversão η sobre a variável x, trazendo-a ao equilíbrio $\bar{x}$ e os saltos são, na maioria do tempo, iguais a zero e quando ocorrem são de tamanho aleatório *φ* e taxa de ocorrência *λ*.

A distribuição de probabilidade do termo dq é:

dq= 0, com probabilidade 1-λdt
dq= φ, com probabilidade λdt

Essa distribuição de probabilidade representa uma distribuição de *Poisson*, onde esses saltos são chamados de "eventos". Sendo λ a freqüência com que um evento pode ocorrer durante um intervalo de tempo infinitesimal dt, a probabilidade de ocorrer um evento é dada por λdt e a probabilidade deste evento não ocorrer será 1- λdt.

---

[9] OPEC: *Organization of the Petroleum Exporting Countries*.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0511105/CA

O valor esperado e a variância de x(t) neste processo são dados através das expressões 7 e 8, porém com a adição no termo de variância que representa a presença destes eventos aleatórios:

$$E(x_t) = \bar{x} + (x_0 - \bar{x}) \times e^{-\eta \times t} \qquad (13)$$

$$Var[x - \bar{x}] = \frac{(\sigma^2 + \lambda \times \mathrm{E}[\varphi^2])}{2\eta} \times (1 - e^{-2 \times \eta \times t}) \qquad (14)$$

A equação de valor esperado representa a média ponderada entre o valor inicial, aqui representado por x_0, e a média de longo prazo $\bar{x}$ (os pesos somam 1). Veja que não há o termo de saltos aleatórios na equação de valor esperado, o que representa o resultado de uma distribuição simétrica dos saltos e probabilidade de 50% para a ocorrência dos eventos, tanto para cima quanto para baixo (positivos ou negativos).

Já na equação de variância, temos a presença do termo de saltos aleatórios, aumentando o valor da variância quando compararmos com a equação apresentada na seção 4.2.3. É valido observar que o valor da variância deste modelo tende ao mesmo valor (e características) da variância do processo estocástico de reversão à média, caso não ocorram esses eventos aleatórios.

A figura 9 apresenta a distribuição de probabilidade do termo de saltos aleatórios em função da taxa de ocorrência dos mesmos.

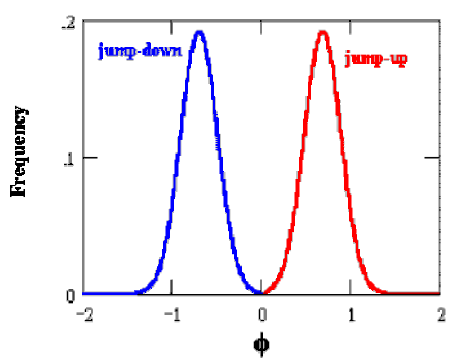

Figura 9 - Distribuição de probabilidade dos saltos aleatórios

Para facilitar o entendimento e manipulação matemática, é permitida a ocorrência de um salto positivo ou negativo, dado que um salto ocorreu e que a probabilidade de ocorrência de um salto é a mesma (50%). Em outras palavras pode-se dizer que caso ocorra um salto, este tem a mesma chance de ser para cima ou para baixo.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0511105/CA

Considera-se também que a distribuição dos saltos são duas normais truncadas em zero, com valores esperados[10] de ln 2 (0,693) e ln 0,5 (- 0,693), significando que se ocorrer um salto positivo, o valor irá aumentar 100% e em caso de salto negativo, irá reduzir em 50%. Tais valores foram escolhidos de forma a capturar mudanças bruscas, no preço de uma determinada *commodity*, provocadas por informações consideradas anormais. Em outras palavras, o tamanho desses saltos não é calculado por se tratar de eventos raros e com isso os dados históricos também são raros. Desta forma, o valor esperado do tamanho de um salto é zero e x(t), representado pela equação de valor esperado que foi apresentada, seja independente da ocorrência de um salto.

De maneira a obter $E[\varphi^2]$, (importante lembrar que $E[\varphi^2] \neq (E[\varphi])^2$) é necessário estimar a integral dada por:

$$E[\varphi^2] = \int \varphi^2 \times f(\varphi) d\varphi \, ,$$

onde f(φ) é a função de densidade de probabilidade, neste caso duas normais. Esta integral depende da distribuição de φ, mas não o parâmetro λ (sendo assim, pode-se calcular a integral se a distribuição do tamanho dos saltos for fixa).

O próximo capítulo mostra como essas ferramentas são utilizadas na prática e as considerações que são feitas para o preço P de uma *commodity* em função de x(t).

[10] A utilização destes valores é mais relevante, mesmo que errados, do que não utilizar valor algum.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0511105/CA