

# 1

## Introdução

*“Yet not every solution of the equations of motion, even if it is exact, can actually occur in Nature. The flows that occur in Nature must not only obey the equations of fluid dynamics, but also be stable.”* L.D.Landau & E.M.Lifshitz (1959)

A importância global do estudo de estabilidade de escoamentos pode ser ilustrada por essa frase, que traduzindo livremente diz que nem toda solução das equações de movimento de um fluido representa um escoamento que pode ser encontrado na natureza, ainda que exata. Para que a solução represente um escoamento real é necessário não só satisfazer as equações da dinâmica de fluidos, como também ser estável. De um modo geral, na modelagem de fenômenos da natureza é importante o estudo de suas fronteiras estáveis no espaço de parâmetros que governam o problema. O objeto de estudo desta tese é a estabilidade hidrodinâmica, que significa determinar o efeito de perturbações em um dado escoamento e determinar se as mesmas vão crescer indefinidamente ou tender a zero à medida que o tempo passa. Existem várias situações em que a análise de estabilidade de escoamentos pode ser utilizada na otimização de processos industriais, porém por ser uma análise complexa só é usada na indústria em estudos mais apurados.

### 1.1

#### A motivação

Em todo escoamento real encontram-se pequenas perturbações que podem alterar os campos de velocidade e pressão em regime permanente. As situações em que as perturbações decrescem com o tempo, e o escoamento retorna para o seu estado permanente, são ditas estáveis. Já aquelas em que as perturbações crescem, e o escoamento permanente não pode mais ser recuperado, são ditas instáveis.

O fenômeno de instabilidade ocorre, de uma forma geral, devido ao desequilíbrio de forças. No caso do fluido newtoniano o desequilíbrio das forças inerciais e viscosas causam instabilidades. escoamentos com baixos números de Reynolds ( $Ua/\nu$ ) onde o efeito da viscosidade é alto são, de um modo geral, estáveis. No famoso experimento de Reynolds em um tubo pode-se observar que o escoamento em regime permanente torna-se instável se o número de Reynolds for maior do que um determinado valor crítico.

Porém, este trabalho não se restringe à análise de escoamentos newtonianos. Nos últimos anos, o estudo do limite de estabilidade de escoamentos de líquidos viscoelásticos tem crescido. Isso é devido aos inúmeros processos industriais nos quais esses líquidos são utilizados. A análise de estabilidade linear é usada para determinar os limites de operação de alguns processos industriais. É assim um ingrediente fundamental para o completo entendimento de processos industriais que envolvam escoamentos de líquidos em regime permanente. Um exemplo disso é a principal motivação deste trabalho: os processos de revestimento, cujo escoamento na região de aplicação da camada de líquido sobre o substrato, de um modo geral, tem que ser laminar, bidimensional e em regime permanente. O objetivo é determinar, dentro do espaço de parâmetros de operação, a região onde o escoamento é estável e conseqüentemente a camada a ser revestida uniforme.

Diferente do caso de líquidos newtonianos, instabilidades puramente elásticas podem ocorrer mesmo na ausência de forças inerciais. A medição de muitas das propriedades mecânicas de líquidos viscoelásticos é feita em escoamentos viscométricos. A confiabilidade dessas medições está diretamente ligada à estabilidade do escoamento dentro do instrumento de medição. Por isso, além da motivação natural para saber se o processo descrito pela formulação matemática de fato ocorre e do entendimento mais completo de alguns processos industriais, controlar as instabilidades de escoamentos em reômetros é fundamental para obter as propriedades reológicas de um determinado líquido.

As simulações de escoamentos viscoelásticos em regime permanente com alta elasticidade ainda hoje representam um grande desafio numérico. No âmbito da estabilidade linear, as dificuldades numéricas ocorrem mesmo em geometrias simples, onde o escoamento é de cisalhamento puro e as equações que governam o regime permanente possuem solução analítica. A análise teórica de estabilidade de escoamentos complexos de líquidos viscoelásticos é recente. A maioria dos trabalhos é restrita a escoamentos viscométricos, dando origem a formulações unidimensionais. O desenvolvimento de uma metodologia genérica de estabilidade linear para escoamentos

complexos enfrenta diversos desafios. Como exemplo, pode-se citar: as singularidades nas equações constitutivas diferenciais dão origem a um espectro contínuo, difícil de ser capturado numericamente; a dificuldade na resolução e na discretização apropriada das tensões elásticas, devido a camadas limites com variações bruscas no comportamento da tensão e a complexidade na solução do problema de autovalor generalizado resultante.

Este trabalho tem como objetivo principal o desenvolvimento de uma formulação baseada no método de elementos finitos para a análise de estabilidade linear em escoamentos viscosos e viscoelásticos. O método de elementos finitos foi escolhido devido à facilidade de estender o desenvolvimento para escoamentos em geometrias complexas.

## 1.2

### Um breve histórico . . .

#### . . . Escoamento newtoniano

Os problemas em estabilidade hidrodinâmica foram identificados e formulados por volta do século XIX. Dentre outros trabalhos de famosos como Helmholtz, Kelvin, Rayleigh, os experimentos de Osbourne Reynolds (descritos em Reynolds, 1883) foram cruciais para o desenvolvimento de várias idéias sobre estabilidade de fluidos(\* tradução livre tirada de M. O. Souza [25]).

1883 - Reynolds:\* *Os experimentos foram feitos em três tubos de aproximadamente 1, 1/2 e 1/4 de polegada. Todos os tubos estavam equipados com bocas largas, de maneira que a água poderia entrar sem sofrer perturbações. A água vinha de um grande tanque de vidro, no qual os tubos estavam imersos. Foi também providenciado que um filete de água colorida entrasse no tubo junto com a água límpida.*

*Os resultados gerais foram os seguintes:*

- (1) *Quando as velocidades eram suficientemente baixas, o filete colorido se estendia numa bela linha reta ao longo do tubo.*
- (2) *Se a água no tanque não estiver totalmente livre de perturbações então, para velocidades suficientemente baixas, o filete colorido iria se deslocar ao longo do tubo, mas sem aparentar nenhuma sinuosidade.*
- (3) *À medida com que a velocidade era aumentada, em algum ponto do tubo, sempre a uma distância considerável da entrada, a faixa colorida se misturava de uma só vez enchendo o resto do tubo com uma massa de água*

colorida.

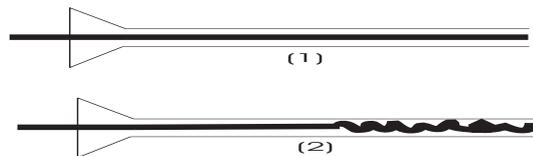


Figura 1.1: Experiência Reynolds

Reynolds mostrou que o escoamento laminar descrito em (1), figura 1.1, deixa de existir quando  $Ua/\nu$  excede um certo valor crítico, onde  $U$  é uma velocidade média do escoamento,  $a$  o raio do tubo e  $\nu$  a viscosidade cinemática. O grupo adimensional  $Ua/\nu$  é hoje conhecido como número de Reynolds. Observou também que a velocidade crítica era bastante sensível a perturbações na água que estava no tanque, e isso o levou a postular que a condição de estabilidade deveria ser associada à magnitude das perturbações permitidas.

Reynolds também observou um fenômeno estranho na velocidade crítica:

*Outro fenômeno era o caráter intermitente da perturbação. A perturbação aparecia durante um certo comprimento do tubo e depois desaparecia e então aparecia de novo, dando a impressão de flashes, que são chamados hoje de manchas ou explosões turbulentas. Ou seja, o escoamento laminar pode mudar de padrão e só depois se tornar turbulento.*

Outro escoamento cuja instabilidade chama atenção é conhecido como *Escoamento de Taylor-Couette*. O fluido é confinado entre dois cilindros concêntricos, onde um deles gira. O movimento gerado pela rotação do cilindro foi matematicamente descrito por Geoffrey I. Taylor em 1923. Um aparato parecido com o que o Taylor usou já havia sido utilizado como um viscosímetro e Maurice Couette descreveu esse aparato em sua tese, 1890, em Paris.

Podem-se observar nesse escoamento, dentre outros, três regimes distintos. Enquanto a taxa de rotação está abaixo de um valor crítico o escoamento é puramente azimuthal e as velocidades na direção radial e axial são nulas. Quando a velocidade crítica prevista pela teoria de estabilidade linear for atingida, então pode-se notar que o escoamento muda de configuração e vórtices toroidais podem ser vistos, como ilustrado na figura

1.2(a). Esses vórtices são chamados de vórtices de Taylor. O escoamento apresenta componentes de velocidade não nulas nas três direções, porém continua em regime permanente. Aumentando-se ainda mais a velocidade de rotação do cilindro, o escoamento passa por uma nova transição de forma a aparecerem ondas azimutais nos vórtices de Taylor, que podem ser vistos na figura 1.2(b). O escoamento torna-se turbulento se a velocidade do cilindro for aumentada ainda mais.

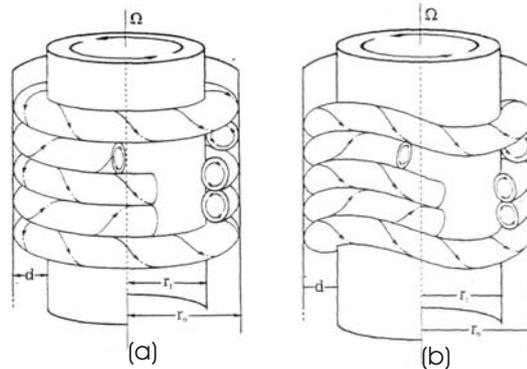


Figura 1.2: Taylor-Couette

O objetivo do estudo de estabilidade hidrodinâmica é ilustrado pelos exemplos acima: investigar se um dado escoamento é estável ou não e determinar as faixas de valores dos parâmetros nas quais ele torna-se instável.

Para escoamentos de líquidos newtonianos já existem muitos exemplos de análise de estabilidade sendo usada em geometrias complexas com o objetivo de melhorar o desempenho de processos industriais, como nos trabalhos de Ruschak, 1983 [8], Christodoulou & Scriven, 1988 [11], Coyle *et. al.*, 1990 [12] e Carvalho & Scriven, 1999 [26]. Porém, a complexidade da formulação e o alto custo computacional limitam a sua utilização.

No caso de escoamentos viscométricos, a maioria dos trabalhos usam formulação de vorticidade, introduzindo uma função de corrente e trabalhando com um operador diferencial de quarta ordem ao invés do sistema de equações que descrevem o escoamento em termos de suas variáveis primitivas. Essa abordagem, juntamente com o operador diferencial resultante, conhecido com operador de Orr-Sommerfeld, vai ser apresentada oportunamente na tese. A equação de quarta ordem resultante é discretizada usando métodos espectrais ou pseudo-espectrais como por exemplo Dongarra *et. al.*, 1996 [17], Bottaro *et. al.* 2003 [31] que usam o método de Chebychev- $\tau$  e a técnica de colocação de Chebychev, respectivamente.

Em todos os casos, seja em escoamentos unidimensionais ou bidimensionais, discretizando o sistema de equações nas variáveis primitivas, ou o operador na função de corrente, usando métodos de elementos finitos ou espectrais, o sistema discreto associado à análise de estabilidade linear é um problema de autovalor generalizado, GEVP, envolvendo matrizes não hermitianas, mal-condicionadas com uma delas singular, como veremos.

### ... Escoamento viscoelástico

O interesse por estabilidade de escoamentos viscoelásticos surgiu mais tarde. Inicialmente, a principal motivação dos estudos era determinar os limites de estabilidade de escoamentos viscométricos utilizados nas medições de propriedades reológicas em reômetros, que correspondem aos limites de operação do equipamento. Shaqfeh, 1996 [18] apresenta uma revisão da literatura com vários exemplos de instabilidades oriundas de forças elásticas nesse tipo de escoamento.

Uma das primeiras análises teóricas de estabilidade de escoamento viscoelásticos foi feita para escoamento de Couette de um líquido cujo comportamento mecânico foi descrito pelo modelo de Maxwell por Gorodtsov & Leonov, 1967 [3]. Os autores provam que no limite de pequenas perturbações (análise linear) o escoamento de Stokes ( $Re = 0$ ) é sempre estável, independente da intensidade das forças elásticas. Eles apresentam resultados analíticos para esse caso ( $Re = 0$ ) que servem até hoje como base de comparação para análises numéricas no estudo de estabilidade. Um outro resultado apresentado por eles foi contestado vinte anos depois. Uma hipótese mal interpretada gerou um engano que fez os autores acreditarem na existência de instabilidade para o escoamento de Couette com líquido de Maxwell, mesmo a baixos números de Reynolds, devida às forças elásticas. Porém, Renardy & Renardy, 1986 [9] mostram o mal entendido e concluem que esse escoamento é sempre estável, independente do valor do número de Reynolds.

A existência de uma solução analítica gerou trabalhos posteriores com a mesma geometria e líquido. Os trabalhos mais comuns são escoamentos unidimensionais, onde a função corrente pode ser usada como a única variável independente do problema, seguindo a mesma metodologia utilizada na análise de escoamentos newtonianos chega-se a um operador equivalente ao Orr-Sommerfeld. A discretização é normalmente feita por um método espectral como nos trabalhos de Sureshkumar, 2004 [32]; Sureshkumar & Arora, 2002 [28]; Wilson *et. al.*, 1999 [24], entre outros, que utilizam os

modos de Chebyshev. Consideram-se perturbações periódicas na direção do escoamento e desconhecidas na direção perpendicular. Assim como no caso Newtoniano, independentemente da discretização utilizada, chega-se a um problema de autovalor generalizado, GEVP. Gorodtsov & Leonov, 1967 [3] apresentam todo o espectro para  $Re = 0$ , que é composto por uma parte discreta e outra contínua.

Apesar dos grandes esforços, a maioria dos resultados numéricos encontrados na literatura não são totalmente satisfatórios, no sentido de que a parte contínua do espectro encontrado numericamente apresenta convergência lenta, sem atingir um valor invariante com o nível de discretização.

A discretização por métodos espectrais não admite uma generalização da metodologia para qualquer geometria, estando restritos a domínios simples. Porém, mesmo com uma metodologia que possa ser estendida, não existem muitos trabalhos que tratem estabilidade de líquidos viscoelásticos em geometrias complexas. O estudo para geometrias complexas ainda está no início. As primeiras tentativas nesse sentido foram feitas através da solução do problema transiente e acompanhando a evolução das perturbações no tempo por Sureshkumar *et. al.*, 1999 [23]. Essa metodologia possui alto custo computacional e sua eficiência não foi totalmente comprovada.

Segundo Sureshkumar *et. al.*, 1999 [23], a análise de estabilidade linear em escoamentos complexos de líquidos viscoelásticos torna-se extremamente complicada devido à natureza hiperbólica das equações diferenciais constitutivas escolhidas, que serão apresentadas no capítulo seguinte. Além disso, a presença de camadas limites de tensões elásticas exige a utilização de métodos de discretização capazes de capturar variações bruscas nos campos perturbados e requer malhas extremamente finas, tornando o custo computacional altíssimo.

Porém esse não é o único nem o maior desafio. Ao discretizar as equações origina-se um problema de autovalor generalizado envolvendo matrizes singulares e mal-condicionadas que adiciona dificuldades numéricas.

### 1.3

#### Organização da tese

Uma curta discussão sobre a importância do estudo de estabilidade hidrodinâmica foi apresentada nessa introdução, seguida de um breve histórico do desenvolvimento de análise de estabilidade linear para escoamentos newtonianos e viscoelásticos, motivando e contextualizando o trabalho. Segue um resumo do desenvolvimento teórico, tanto para as equações

governantes, como para a análise de estabilidade linear, e também uma descrição das teorias mais usadas na solução do problema de autovalor generalizado. Detalhes não serão apresentados, podendo ser encontrados nas referências. O objetivo dessa discussão teórica é fazer com que o trabalho fique o mais auto-contido possível.

Os capítulos que seguem trazem as contribuições da tese: A discretização do problema utilizando o método de Galerkin / elementos finitos, sua validação de acordo com resultados disponíveis na literatura, e no caso não Newtoniano a análise do efeito da função base utilizada na discretização do campo de tensão na resposta obtida. Para a solução do problema de autovalor generalizado, transformações são propostas que, como veremos, reduzem significativamente o tempo e memória computacionais. Tanto a discretização com elementos finitos como o novo método de solução do problema de auto valor generalizado são aplicados para escoamentos uni e bidimensionais de líquidos newtonianos e também para um escoamento unidimensional de líquido viscoelástico. Apresentaremos exemplos, descobertas, discussões e muitos questionamentos que servirão para trabalhos futuros.

Nos apêndices, encontram-se os códigos em *matlab* do novo método para resolver os problemas de autovalor generalizado. Apenas os códigos dos problemas unidimensionais são fornecidos, pois na formulação bidimensional, por ser mais complexa, a identificação dos passos necessários para eliminar os autovalores é feita usando as numerações locais dos elementos já vinda da discretização, isso torna o código confuso ao ser apresentado sozinho.